Fundamentos de Control

Ulises Pérez Ventura

Contacto:
Posgrado de Ingeniería (Edificio T),
en el laboratorio de Modos Deslizantes (segundo piso)

econtrolfi@gmail.com

Ejercicios para el Tema 5:

Diseño por Medio de la Respuesta en Frecuencia

Ejercicio 1

Dada la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{12(s+3)}{s^2(s+5)(s^2+6s+13)}.$$

Obtenga el **diagrama de Bode** de cada uno de los elementos que componen la FT y el diagrama de Bode total. Determine los **márgenes de estabilidad práctica**.

Solución del Ejercicio 1

Función de Transferencia

$$G(s) = \frac{12(s+3)}{s^2(s+5)(s^2+6s+13)}$$

FT Normalizada

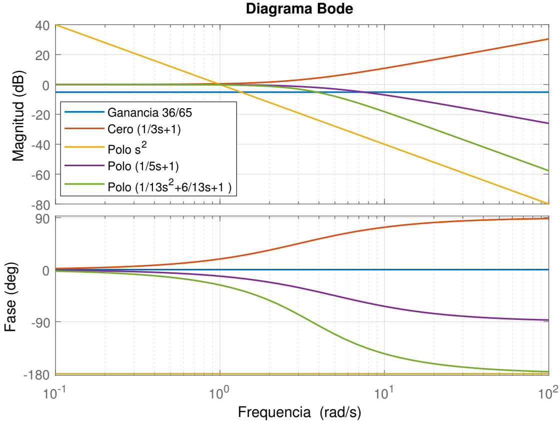
$$G(s) = \frac{\frac{36}{65}\left(\frac{1}{3}s+1\right)}{s^2\left(\frac{1}{5}s+1\right)\left(\frac{1}{13}s^2+\frac{6}{13}s+1\right)}$$

Elementos de la FT Normalizada

1. Ganancia $36/65$.
2. Cero de primer orden con frecuencia de corte $\omega_{c_z} = 3$ [rad/s].
3. Doble integrador $1/s^2$.
4. Polo de primer orden con frecuencia de corte $\omega_{c_{p1}} = 5$ [rad/s].
5. Polo de segundo orden con $\zeta = 0.832$ y $\omega_{c_{p2}} = \sqrt{13}$ [rad/s].

Solución del Ejercicio 1

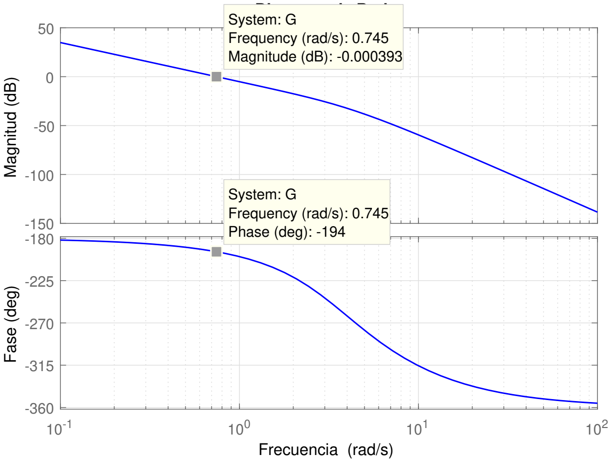
Gráficas de Magnitud y Fase correspondientes a cada elemento de la FT Normalizada.



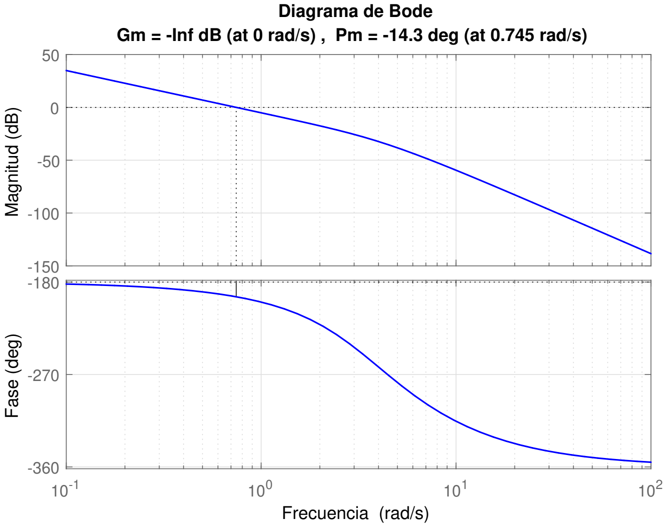

```
bode([36/65],[1]); hold on; bode([1 3],[1]);
bode([1],[1 0 0]); bode([1],[1 5]); bode([1],[1 6 13]);
```

Solución del Ejercicio 1

Para el Bode total, se suman punto a punto las magnitudes y las fases de los elementos.




```
bode([12 36],[1 11 43 65 0 0]);
```




```
margin([12 36],[1 11 43 65 0 0]);
```

Ejercicio 2

Diseñe un *compensador en adelanto* para el sistema

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)},$$

tal que la **constante estática del error** sea $K_v = 4$, el **margen de fase** 40° y el **margen de ganancia** 10 [dB]. Obtenga la **respuesta al escalón** del sistema en lazo cerrado.

Solución del Ejercicio 2

FT del Compensador

$$G_c(s) = K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

con $0 < \alpha < 1$.

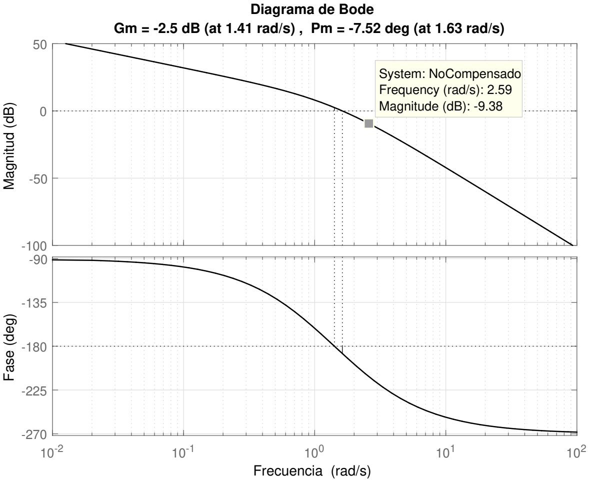
Paso 1: constante estática del error

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0}\frac{2\,K_c\alpha\,s}{s(s+1)(s+2)} = K_c\alpha\,,$$

se obtiene $K_v = K_c\alpha = 4$.

Solución del Ejercicio 2

Paso 2




```
G=tf([2],[1 3 2 0]); Kv=4; margin(Kv*G);
```

Solución del Ejercicio 2

Paso 3: adelanto deseado,

$$\phi_m = 40^\circ - (-7.52^\circ) + 5^\circ = 52.52^\circ\,.$$

Paso 4: factor de atenuación,

$$\alpha = \frac{1 - \mathrm{sen}(\phi_m)}{1 + \mathrm{sen}(\phi_m)} = 0.115\,.$$

Paso 5: ω_m tal que $|K_v G(j\omega_m)| = -20\log(\frac{1}{\sqrt{\alpha}})$,

$$|K_v G(j\omega_m)| = -9.38\ [\mathrm{dB}] \ \Rightarrow\ \omega_m = 2.59 \left[\frac{\mathrm{rad}}{s}\right].$$

Paso 6: frecuencias de esquina,

$$\omega_z = \omega_m\sqrt{\alpha} = 0.879\,; \qquad \omega_p = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = 7.633\,.$$

Paso 7: ganancia,

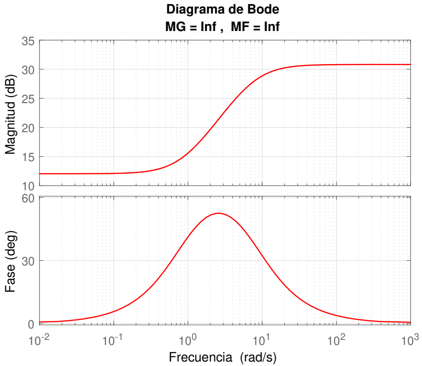
$$K_c = \frac{K_v}{\alpha} = 34.745\,.$$

FT del Compensador

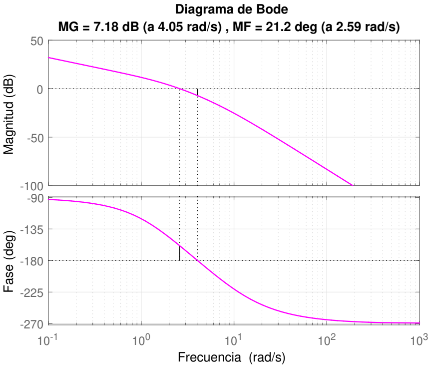
$$G_c(s) = \frac{34.74s + 30.53}{s + 7.633}$$

Solución del Ejercicio 2

Compensador



Sistema Compensado

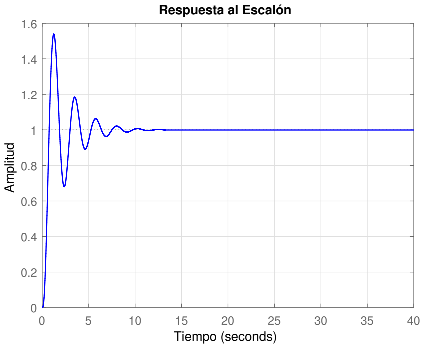



```
Gc=tf([34.74 30.53],[1 7.633]); figure; margin(Gc);
figure; margin(Gc*G);
```

Solución del Ejercicio 2

Observaciones

- El sistema sin compensador era **inestable** en lazo cerrado, puesto que tenia MF y MG **negativos**.
- El sistema con compensador es **estable** con $MF = 21.2^{\circ}$ y $MG = 7.18$ [dB].




```
CLOOP=feedback(Gc*G,1);
step(CLOOP);
```

Ejercicio 3

Diseñe un *compensador en atraso* para el sistema

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)},$$

tal que la **constante estática del error** sea $K_v = 4$, el **margen de fase** 40° y el **margen de ganancia** 10 [dB]. Obtenga la **respuesta al escalón** del sistema en lazo cerrado.

Solución del Ejercicio 3

FT del Compensador

$$G_c(s) = K_c\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$$

con $\beta > 1$.

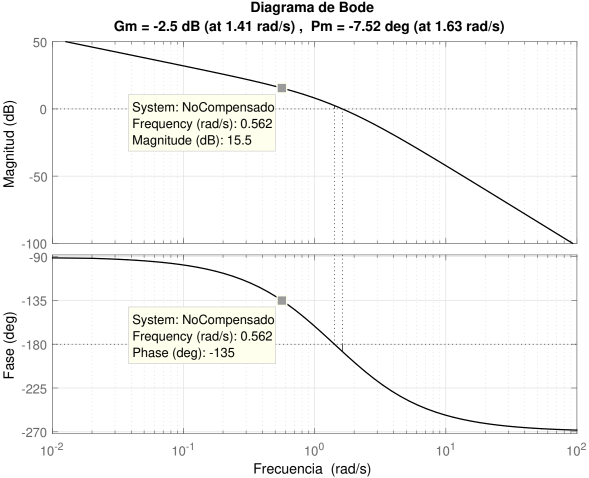
Paso 1

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0}\frac{2\,K_c\beta\,s}{s(s+1)(s+2)} = K_c\beta\,,$$

se obtiene $K_v = K_c\beta = 4$.

Solución del Ejercicio 3

Paso 2




```
G=tf([2],[1 3 2 0]); Kv=4; margin(Kv*G);
```

Solución del Ejercicio 3

Paso 3: ω_m tal que $\angle G(j\omega_m) \approx -180^\circ + MF_{\text{req}}$,

$$\angle G(j\omega_m) = -135^\circ \quad \Rightarrow \quad \omega_m = 0.562 \left[\frac{\text{rad}}{s}\right].$$

Paso 4: frecuencia de esquina,

$$\omega_z = \frac{1}{T} = \frac{\omega_m}{10} = 0.0562\,.$$

Paso 5: atenuación necesaria $\lambda = -|G(j\omega_m)|$,

$$\lambda = -15.5 = -20\log(\beta) \quad \Rightarrow \quad \beta = 5.956\,.$$

Paso 6: frecuencia de esquina,

$$\omega_p = \frac{1}{\beta T} = 0.0094\,.$$

Paso 7: ganancia,

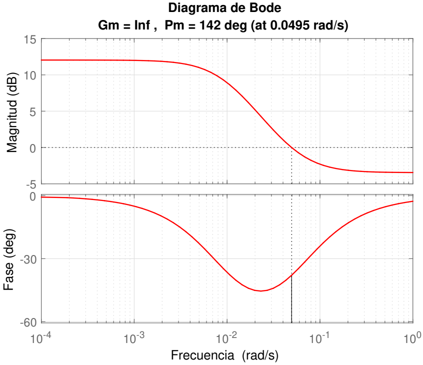
$$K_c = \frac{K_v}{\beta} = 0.6715\,.$$

FT del Compensador

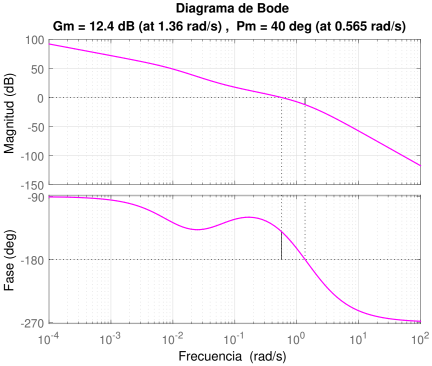
$$G_c(s) = \frac{0.672s + 0.038}{s + 0.0094}$$

Solución del Ejercicio 3

Compensador



Sistema Compensado

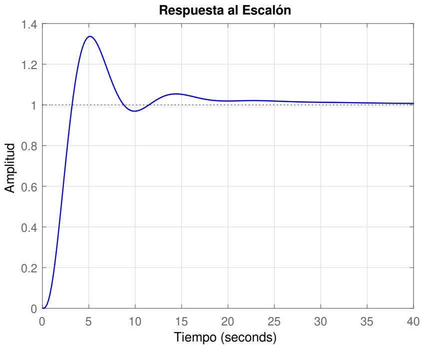



```
Gc=tf([0.672 0.038],[1 0.0094]); figure; margin(Gc);
figure; margin(Gc*G);
```

Solución del Ejercicio 3

Observaciones

- El sistema sin compensador era **inestable** en lazo cerrado, puesto que tenia MF y MG **negativos**.
- El sistema con compensador es **estable** con $MF = 40^\circ$ y $MG = 12.4$ [dB].




```
CLOOP=feedback(Gc*G,1);
step(CLOOP);
```

Ejercicio 4

Diseñe un *compensador en atraso-adelanto* para el sistema

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)},$$

tal que la **constante estática del error** sea $K_v = 4$, el **margen de fase** 40° y el **margen de ganancia** 10 [dB]. Obtenga la **respuesta al escalón** del sistema en lazo cerrado.

Solución del Ejercicio 4

FT del Compensador

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)\left(s+\frac{1}{\tau_2}\right)}{\left(s+\frac{\gamma}{\tau_1}\right)\left(s+\frac{1}{\beta\tau_2}\right)}$$

con $\beta > 1$, $\gamma > 1$; donde usualmente se eligen $\beta = \gamma$.

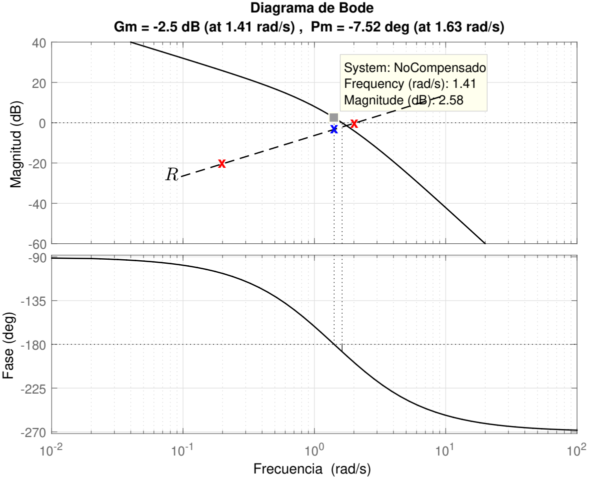
Paso 1

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2\,K_c\beta\,s}{\gamma s(s+1)(s+2)} = \frac{K_c\beta}{\gamma},$$

se obtiene $K_v = \frac{K_c\beta}{\gamma} = 4$.

Solución del Ejercicio 4

Paso 2




```
G=tf([2],[1 3 2 0]); Kv=4; margin(Kv*G);
```

Solución del Ejercicio 4

Paso 3: ω_c tal que $\angle G(j\omega_c) = -180^\circ$,

$$\angle G(j\omega_c) = -180^\circ \;\Rightarrow\; \omega_c = 1.41 \left[\frac{\text{rad}}{s}\right].$$

Paso 4: frecuencia de esquina en atraso,

$$\omega_{z_{\text{atraso}}} = \frac{1}{\tau_2} = \frac{\omega_c}{10} = 0.141\,.$$

Paso 5: adelanto de fase $\phi_m \approx MF_{\text{req}}$,

$$\phi_m = 50^\circ \;\Rightarrow\; \beta = \frac{1+\text{sen}(\phi_m)}{1-\text{sen}(\phi_m)} = 7.55\,.$$

Paso 6: frecuencia de esquina en atraso,

$$\omega_{p_{\text{atraso}}} = \frac{1}{\beta\tau_2} = 0.0187\,.$$

Paso 7: frecuencias de esquina en adelanto

La recta R cruza -20 [dB] a la frecuencia 0.2 [rad/s], luego

$$\omega_{z_{\text{adelanto}}} = \frac{1}{\tau_1} = 0.2$$
$$\omega_{p_{\text{adelanto}}} = \frac{\gamma}{\tau_1} = 1.51$$

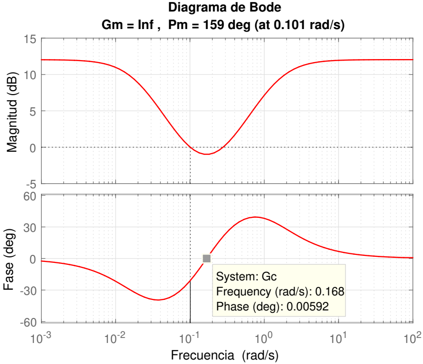
considerando $\gamma = \beta = 7.55$.

FT del Compensador

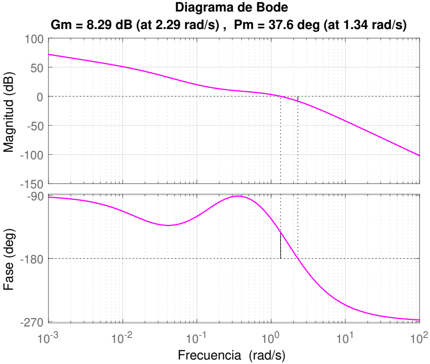
$$G_c(s) = \frac{4s^2 + 1.364s + 0.1128}{s^2 + 1.528s + 0.282}$$

Solución del Ejercicio 4

Compensador



Sistema Compensado

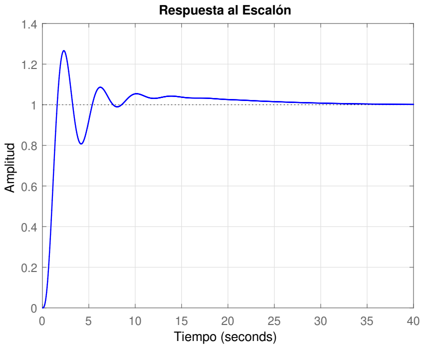



```
Gc=tf([4 1.36 0.11],[1 1.53 0.28]); figure;
margin(Gc); figure; margin(Gc*G);
```

Solución del Ejercicio 4

Observaciones

- El sistema sin compensador era **inestable** en lazo cerrado, puesto que tenia MF y MG **negativos**.
- El sistema con compensador es **estable** con $MF = 37.6^\circ$ y $MG = 8.29$ [dB].




```
CLOOP=feedback(Gc*G,1);
step(CLOOP);
```

Conclusión de los Ejercicios 2-4

C. Adelanto

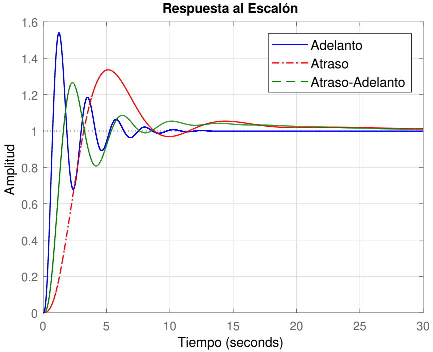
- $MF = 21.2°$; $MG = 7.18$ [dB]
- $t_r = 0.75$ [s]; $t_s = 5.991$ [s]
- $t_p = 1.24$ [s]; $M_p = 53.9$ [%]

C. Atraso

- $MF = 40°$; $MG = 12.4$ [dB]
- $t_r = 3.20$ [s]; $t_s = 15.31$ [s]
- $t_p = 5.15$ [s]; $M_p = 33.7$ [%]

C. Atraso-Adelanto

- $MF = 37.6°$; $MG = 8.29$ [dB]
- $t_r = 3.26$ [s]; $t_s = 10.62$ [s]
- $t_p = 2.30$ [s]; $M_p = 26.6$ [%]



Note:

$$t_r < t_r < t_r$$
$$t_s < t_s < t_s$$
$$M_p < M_p < M_p$$

Ejercicio 5

Dada la función de transferencia discreta

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+a)}\right\} = K\frac{\alpha z + \beta}{(z-1)(z+\gamma)}$$

con $a > 0$; $\alpha = \frac{-1+aT+e^{-aT}}{a^2}$; $\beta = \frac{1-aTe^{-aT}-e^{-aT}}{a^2}$; $\gamma = -e^{-aT}$. Utilice la aproximación *de Tustin* y el *criterio de Routh*, para determinar los valores de la ganancia $K > 0$ que **garantizan estabilidad** de lazo cerrado. Compruebe los resultados para $a = 1$, $T = 0.1$ [s] y $T = 1$ [s], respectivamente.

Solución del Ejercicio 5

Tiempo Continuo

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

Tiempo Discreto

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{K}{s^2(s+a)}\right\} = K\frac{\alpha z + \beta}{(z-1)(z+\gamma)}$$

Transformación Bilineal

Sustituyendo $z = \frac{2+Tw}{2-Tw}$ en la FT discreta,

$$G(w) = \frac{K\alpha\left(\frac{2+Tw}{2-Tw}\right)+K\beta}{\left(\frac{2+Tw}{2-Tw}\right)^2+(\gamma-1)\left(\frac{2+Tw}{2-Tw}\right)-\gamma} = \frac{K\alpha(2+Tw)(2-Tw)+K\beta(2-Tw)^2}{(2+Tw)^2+(\gamma-1)(2+Tw)(2-Tw)-\gamma(2-Tw)^2}$$

$$G(w) = K\frac{\left(\frac{\beta-\alpha}{1-\gamma}\right)w^2 - \frac{4}{T}\left(\frac{\beta}{1-\gamma}\right)w + \frac{4}{T^2}\left(\frac{\beta+\alpha}{1-\gamma}\right)}{2w\left(w + \frac{2}{T}\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)\right)}$$

Solución del Ejercicio 5

Ecuación Característica

$$F(w) = 1 + K\frac{\left(\frac{\beta-\alpha}{1-\gamma}\right)w^2 - \frac{4}{T}\left(\frac{\beta}{1-\gamma}\right)w + \frac{4}{T^2}\left(\frac{\beta+\alpha}{1-\gamma}\right)}{2w\left(w + \frac{2}{T}\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)\right)} = 0$$

$$\left(2 + K\left(\frac{\beta-\alpha}{1-\gamma}\right)\right)w^2 + \left(\frac{4}{T}\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right) - \frac{4K}{T}\left(\frac{\beta}{1-\gamma}\right)\right)w + \frac{4K}{T^2}\left(\frac{\beta+\alpha}{1-\gamma}\right) = 0$$

Utilizando el criterio de **estabilidad de Routh**,

$$\begin{array}{c||c||c} w^2 & 2 + K\left(\frac{\beta-\alpha}{1-\gamma}\right) & \frac{4K}{T^2}\left(\frac{\beta+\alpha}{1-\gamma}\right) \\ w^1 & \frac{4}{T}\left(\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right) - K\left(\frac{\beta}{1-\gamma}\right)\right) & 0 \\ w^0 & \frac{4K}{T^2}\left(\frac{\beta+\alpha}{1-\gamma}\right) & 0 \end{array}$$

condiciones de **estabilidad**: $K > 0$; $K < \frac{1+\gamma}{\beta}$; $K < \frac{2(1-\gamma)}{\alpha-\beta}$.

Solución del Ejercicio 5

Sean $a = 1,\ T = 1$ [s]:

$$G(z) = K\frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

Aplicando la **transformación bilineal**,

$$G(w) = K\frac{-0.07602w^2 - 0.7719w + 1.848}{2w^2 + 1.848w}$$

Estabilidad de lazo cerrado,

$$F(w) = 1 + G(w) = 0$$

utilizando **Routh** se obtienen las condiciones

$$\begin{array}{cc} 1.848K > 0; & K > 0 \\ 1.848 - 0.7719K > 0; & K < 2.3941 \\ 2 - 0.07602K > 0; & K < 26.3089 \end{array}$$

$$0 < K < 2.394$$

Sean $a = 1,\ T = 0.1$ [s]:

$$G(z) = K\frac{0.00484z + 0.00468}{(z-1)(z-0.9048)}$$

Aplicando la **transformación bilineal**,

$$G(w) = K\frac{-8.4\times10^{-5}w^2 - 0.0983w + 1.999}{2w^2 + 1.999w}$$

Estabilidad de lazo cerrado,

$$F(w) = 1 + G(w) = 0$$

utilizando **Routh** se obtienen las condiciones

$$\begin{array}{cc} 1.999K > 0; & K > 0 \\ 1.999 - 0.0983K > 0; & K < 20.336 \\ 2 - 8.4\times10^{-5}K > 0; & K < 2.38\times10^4 \end{array}$$

$$0 < K < 20.336$$

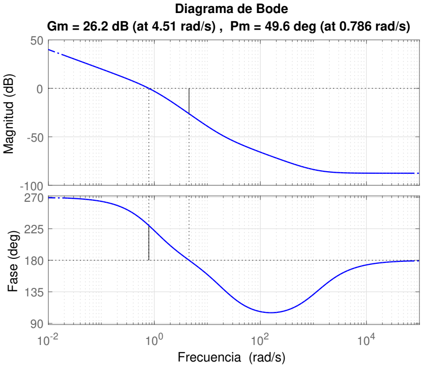
Ejercicio 6

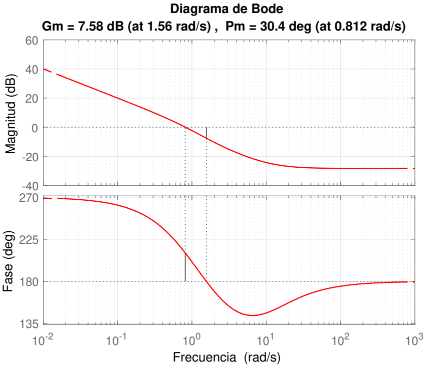
Dada la función de transferencia discreta

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+a)}\right\} = K\frac{\alpha z + \beta}{(z-1)(z+\gamma)}$$

con $a = 1$; $\alpha = \frac{-1+aT+e^{-aT}}{a^2}$; $\beta = \frac{1-aTe^{-aT}-e^{-aT}}{a^2}$; $\gamma = -e^{-aT}$. Utilice la aproximación *de Tustin* para construir el *diagrama de Bode* y determinar los márgenes de estabilidad práctica para $T = 0.1$ [s] y $T = 1$ [s], respectivamente.

Solución del Ejercicio 6






```
G=tf([1],[1 1 0]);
T=0.1; Gd=c2d(G,T,'zoh');
Gc=d2c(Gd,'tustin');
margin(Gc);
```

```
G=tf([1],[1 1 0]);
T=1; Gd=c2d(G,T,'zoh');
Gc=d2c(Gd,'tustin');
margin(Gc);
```

Ejercicio 7

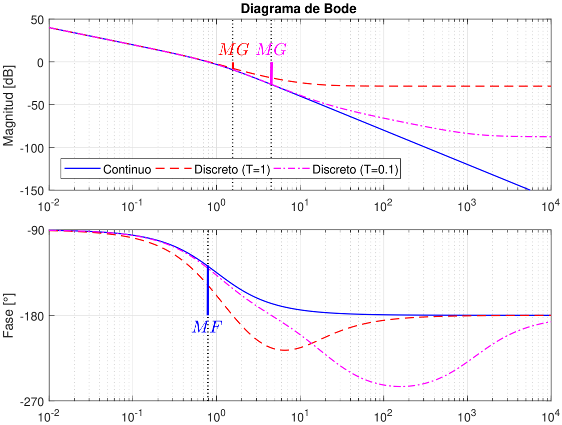
Dada la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)},$$

con $a = 1$. Utilice Matlab para construir un esquema de control digital para la **regulación automática** de la salida. Compare la **respuesta al escalón** del sistema en lazo cerrado obtenido con el método del ROC y con la aproximación de Tustin, bajo el paso de muestreo $T = 1$ [s] y $T = 0.1$ [s], respectivamente.

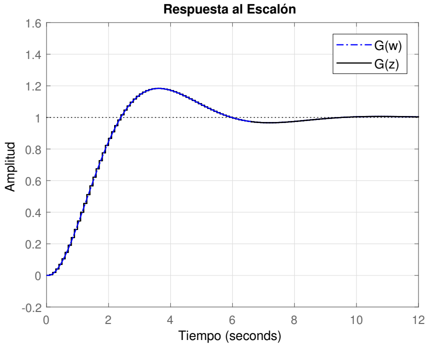
Solución del Ejercicio 7

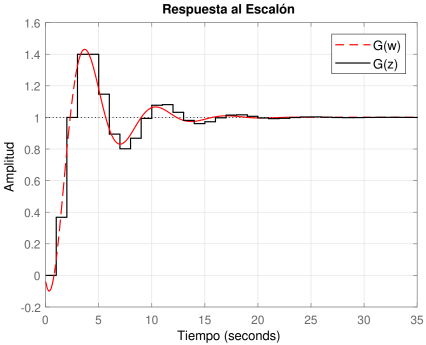
```
K=1; a=1;
G=tf([K],[1 a]);
bode(G); hold on;
T=1;
Gd=c2d(G,T,'zoh');
Gc=d2c(Gd,'tustin');
bode(Gc);
T=0.1;
Gd=c2d(G,T,'zoh');
Gc=d2c(Gd,'tustin');
bode(Gc);
```



El sistema en tiempo continuo tiene $MF = 51.8^\circ$ y $MG \rightarrow \infty$; cualquier ganancia $K > 0$ garantiza **estabilidad de lazo cerrado**. En tiempo discreto con $T = 1$ [s] se tiene $MF = 30.4^\circ$ y $MG = 7.58$ [dB], únicamente los valores de la ganancia $0 < K < 2.392$ aseguran **estabilidad de lazo cerrado**.

Solución del Ejercicio 7






```
T=0.1;
CLPd=feedback(Gd,1);
step(CLPd); hold on;
CLPc=feedback(Gc,1);
step(CLPc);
```

```
T=1;
CLPd=feedback(Gd,1);
step(CLPd); hold on;
CLPc=feedback(Gc,1);
step(CLPc);
```