Fundamentos de Control

Ulises A. Pérez Ventura

Contacto:
Posgrado de Ingeniería (Edificio T),
en el laboratorio de Modos Deslizantes (segundo piso)

econtrolfi@gmail.com

Ejercicios para el Tema 4:

Lugar Geométrico de las Raíces

Ejercicio 1

Dada la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)},$$

con $a = 7$. Calcule las **soluciones de la ecuación característica** $1 + G(s) = 0$, considerando diferentes valores de la ganancia $K > 0$. Dibuje la **gráfica de las raíces** en el plano complejo.

Solución del Ejercicio 1

FT de lazo abierto

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

FT de lazo cerrado

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s(s+a)+K}$$

Polos de lazo abierto

$$s_1 = 0\,, \qquad s_2 = -a$$

Polos de lazo cerrado

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4K}\right)$$

Observación

Los **polos de lazo** cerrado dependen del valor de a (parámetro del sistema) y del valor de la **ganancia** K **de realimentación**.

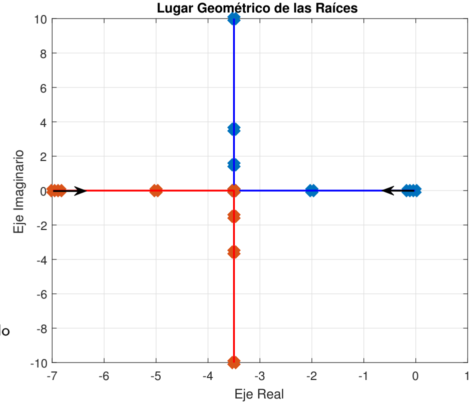
Solución del Ejercicio 1

Considere $a = 7$ y los valores de K de acuerdo con la siguiente tabla:

K	s_1	s_2
0.1	-6.98	-0.01
1	-6.85	-0.14
10	-5	-2
12.25	-3.5	-3.5
14.5	$-3.5 - j1.5$	$-3.5 + j1.5$
25	$-3.5 - j3.5$	$-3.5 + j3.5$
112.25	$-3.5 - j10$	$-3.5 + j10$

Note:

$0 < K < 12.25 \Rightarrow$ Sobreamortiguado
$K = 12.25 \Rightarrow$ Críticamente amortiguado
$K > 12.25 \Rightarrow$ Subamortiguado



Ejercicio 2

Dada la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)},$$

con $a > 0$. Utilice las *reglas de Evans* para construir la gráfica del **Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)**.

Solución del Ejercicio 2

1. Puntos de origen

Son los **puntos donde inicia** la gráfica del LGR, es decir, los **polos** de la FT de lazo abierto $G(s)$.

Ejemplo

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

donde $a > 0$ y $K > 0$.

Puntos de Origen

$$s_{p_1} = 0$$
$$s_{p_2} = -a$$

Solución del Ejercicio 2

2. Puntos terminales

Son los **puntos donde termina** la gráfica del LGR, es decir, los **ceros** de la FT de lazo abierto $G(s)$.

Ejemplo

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

donde $a > 0$ y $K > 0$.

Puntos Terminales

$$s_{z_1} \to \infty$$
$$s_{z_2} \to \infty$$

Solución del Ejercicio 2

3. Grado relativo

Se define el **grado relativo**,

$$N = p - z\,,$$

donde p es el número de **polos** y z es el número de **ceros finitos**, de la FT de lazo abierto $G(s)$.

Ejemplo

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

donde $a > 0$ y $K > 0$.

Grado Relativo

$$N = 2 - 0 = 2$$

Solución del Ejercicio 2

4. Ángulos de las asíntotas del LGR

Los **ángulos** correspondientes a las **asíntotas** son

$$\theta_j = \frac{180^\circ(2j+1)}{N},$$

donde $j = 0, 1, 2, ..., N-1$.

Ejemplo

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

donde $a > 0$, $K > 0$ y $N = 2$.

Ángulos de las Asíntotas

$$\theta_j = \frac{180^\circ(2j+1)}{N}$$

donde $j = 0, 1$, es decir:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 90^\circ \\ \theta_1 &= 270^\circ \end{aligned}$$

Solución del Ejercicio 2

5. Intersección de las asíntotas con el eje Real

Las N asíntotas **cruzan el eje Real** en el punto,

$$\sigma = \frac{\Sigma\{\text{Polos de } G(s)\} - \Sigma\{\text{Ceros de } G(s)\}}{N}.$$

Ejemplo

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

donde $a > 0$, $K > 0$ y $N = 2$.

Int. de las Asíntotas con el Eje Real

$$\sigma = \frac{-a+0-0}{N} = -\frac{a}{2}$$

Solución del Ejercicio 2

6. Lugar geométrico de las raíces sobre el eje Real

Un punto sobre el eje Real **pertenece al LGR** si el número total de polos y ceros de $G(s)$, que hay **a la derecha** del punto considerado, es **impar**.

Intervalo	Punto de prueba	Número de polos/ceros	Conclusión
$(-\infty, -a)$	$-2a$	2	No pertenece al LGR
$(-a, 0)$	$\frac{-a}{2}$	1	Sí pertenece al LGR
$(0, \infty)$	$2a$	0	No pertenece al LGR

Solución del Ejercicio 2

7. Ángulos de salida y llegada

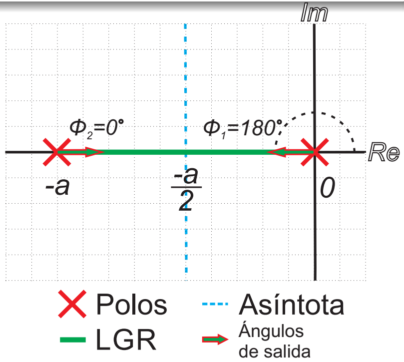
El **ángulo de salida de un polo**, o bien, el **ángulo de llegada de un cero** de $G(s)$, satisfacen *localmente* la **condición de ángulo**.

$$\arg\{G(s)\} = \Sigma\phi_p - \Sigma\phi_z = 180^\circ(2j+1), \quad j = 0, 1, \ldots$$

Ángulos de salida y llegada

Cuando hay **polos y ceros** puramente reales, los ángulos se encuentran por *inspección*:

$$\begin{aligned} \phi_{p_1} &= 180^\circ \\ \phi_{p_2} &= 0^\circ \end{aligned}$$



Solución del Ejercicio 2

8. Intersección del LGR con el eje imaginario

Sobre el eje Imaginario cualquier punto satisface $s = j\omega$. Sustituyendo en la EC de lazo cerrado, $1 + G(j\omega) = 0$, se obtiene el valor de la ganancia K y la frecuencia ω [rad/s] a la que el **cruce del LGR con el eje Imaginario**.

Ejemplo

$$1 + G(s)H(s) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$s^2 + as + K = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(j\omega)^2 + a(j\omega) + K = 0$$

Int. del LGR con el eje imaginario

$$-\omega^2 + K = 0$$
$$a\omega = 0$$

cuya solución es $K = \omega = 0$ (*trivial*).

Solución del Ejercicio 2

9. Puntos de ruptura sobre el eje real

Son los puntos sobre el eje Real donde **dos polos dejan de ser reales y se hacen complejos conjugados** (o viceversa). Se determinan despejando la ganancia K de la EC de lazo cerrado, $1 + G(s) = 0$, y utilizando el criterio de la primera derivada

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s} = 0\,,$$

se obtienen los valores de ruptura s_r.

Ejemplo

$$K = -s^2 - as$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s} = -2s_r - a = 0$$

Punto de ruptura

$$s_r = -\frac{a}{2}$$

Ejercicio 3

Dada la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s+5)}\,.$$

Utilice las *reglas de Evans* para construir la gráfica del **Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)**.

Solución del Ejercicio 3

1. Puntos de Origen

$$s(s+4)(s+5)=0 \quad \begin{cases} s_{p_1} &= 0 \\ s_{p_2} &= -4 \\ s_{p_3} &= -5 \end{cases}$$

2. Puntos Terminales

$$\text{No hay ceros finitos} \quad \begin{cases} s_{z_1} \to \infty \\ s_{z_2} \to \infty \\ s_{z_3} \to \infty \end{cases}$$

Solución del Ejercicio 3

3. Grado Relativo

$$N = p - z = 3 - 0 = 3$$

4. Ángulos de las Asíntotas del LGR

$$\begin{aligned} \theta_j &= \frac{180^\circ(2j+1)}{N} \\ j &= 0, 1, ..., N-1 \end{aligned} \qquad \begin{cases} \theta_0 = \dfrac{180^\circ}{3} = 60^\circ \\[2ex] \theta_1 = \dfrac{540^\circ}{3} = 180^\circ \\[2ex] \theta_2 = \dfrac{900^\circ}{3} = 300^\circ \end{cases}$$

Solución del Ejercicio 3

5. Intersección de las Asíntotas con el eje Real

$$\sigma = \frac{\Sigma\{\text{Polos de } G(s)\} - \Sigma\{\text{Ceros de } G(s)\}}{N}$$

$$\sigma = \frac{0-4-5-0}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$

6. LGR sobre el eje Real

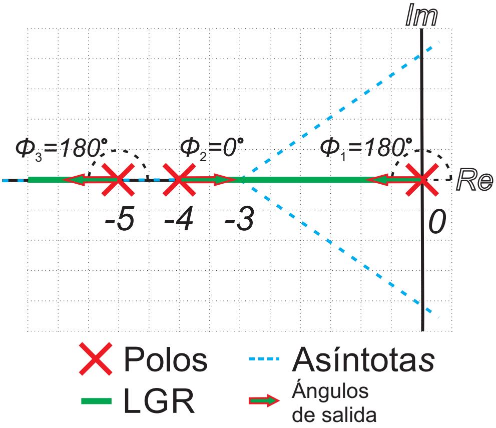
Intervalo	Punto de prueba	Número de polos/ceros	Conclusión
$(-\infty, -5)$	-6	3	Sí pertenece al LGR
$(-5, -4)$	-4.5	2	No pertenece al LGR
$(-4, 0)$	-2	1	Sí pertenece al LGR
$(0, \infty)$	2	0	No pertenece al LGR

Solución del Ejercicio 3

7. Ángulos de Salida

Por *inspección*:

$$\begin{aligned} \phi_{p_1} &= 180^\circ \\ \phi_{p_2} &= 0^\circ \\ \phi_{p_3} &= 180^\circ \end{aligned}$$



Solución del Ejercicio 3

8. Intersección del LGR con el eje Imaginario

$$1 + G(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s(s+4)(s+5) + K = 0$$

Sustituyendo $s = j\omega$,

$$(j\omega)^3 + 9(j\omega)^2 + 20(j\omega) + K = 0$$

se debe resolver el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} -9\omega_c^2 + K_c &= 0 \\ -\omega_c \left(\omega_c^2 - 20\right) &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución *no trivial* es $\omega_c = \pm 4.472$ [rad/s] y $K_c = 180$.

Solución del Ejercicio 3

9. Puntos de Ruptura Sobre el Eje Real

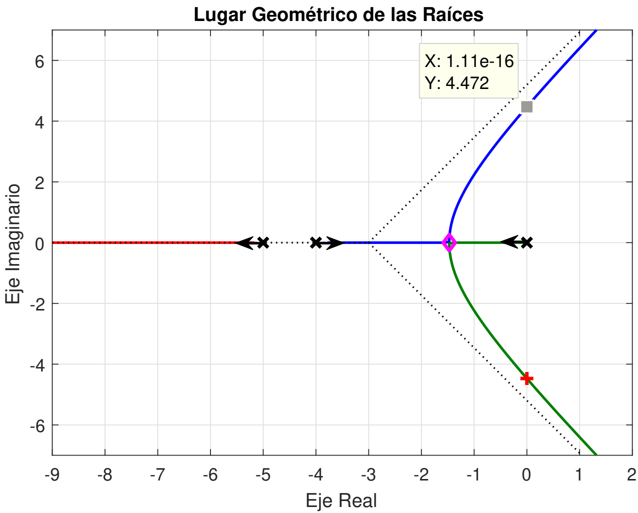
$$1 + G(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = -(s^3 + 9s^2 + 20s)$$

Utilizando el criterio de la primera derivada

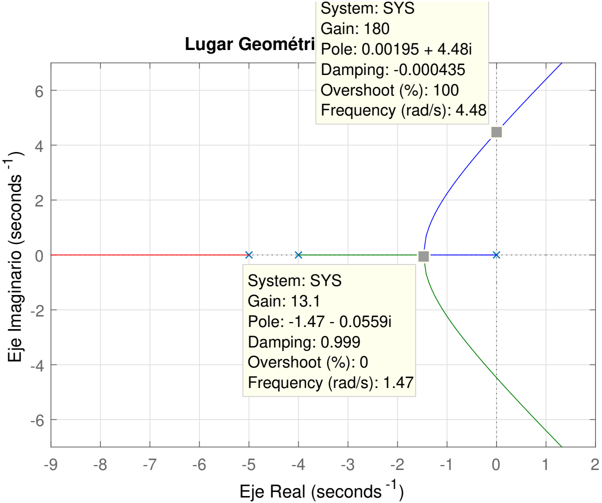
$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s} = 3s_r^2 + 18s_r + 20 = 0 \qquad \begin{cases} s_{r_1} = -1.472 \\ s_{r_2} = -4.527 \end{cases}$$

note que el punto $s_{r_2} = -4.527$ **no pertenece** al LGR sobre el eje Real.

Solución del Ejercicio 3



Solución del Ejercicio 3 (Matlab)




```
SYS=tf([1],[1 9 20 0]); figure; rlocus(SYS);
```

Ejercicio 4

Dada la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{K(s+9)}{s(s^2+4s+11)}.$$

Utilice las *reglas de Evans* para construir la gráfica del **Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)**.

Solución del Ejercicio 4

1. Puntos de Origen

$$s(s^2+4s+11)=0 \quad \begin{cases} s_{p_1} &= 0 \\ s_{p_2} &= -2+j2.646 \\ s_{p_3} &= -2-j2.646 \end{cases}$$

2. Puntos Terminales

$$s+9=0 \quad \begin{cases} s_{z_1} &= -9 \\ s_{z_2} &\to \infty \\ s_{z_3} &\to \infty \end{cases}$$

Solución del Ejercicio 4

3. Grado Relativo

$$N = p - z = 3 - 1 = 2$$

4. Ángulos de las Asíntotas del LGR

$$\begin{aligned} \theta_j &= \frac{180^\circ(2j+1)}{N} \\ j &= 0, 1, ..., N-1 \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta_0 &= \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \\ \theta_1 &= \frac{540^\circ}{2} = 270^\circ \end{aligned} \right.$$

Solución del Ejercicio 4

5. Intersección de las Asíntotas con el eje Real

$$\sigma = \frac{\Sigma\{\text{Polos de } G(s)\} - \Sigma\{\text{Ceros de } G(s)\}}{N}$$

$$\sigma = \frac{0 - 2 + j2.646 - 2 - j2.646 - (-9)}{2} = \frac{-4+9}{2} = 2.5$$

6. LGR sobre el eje Real

Intervalo	Punto de prueba	Numero de polos/ceros	Conclusión
$(-\infty, -9)$	-10	2	No pertenece al LGR
$(-9, 0)$	-5	1	Sí pertenece al LGR
$(0, \infty)$	5	0	No pertenece al LGR

Solución del Ejercicio 4

7.1. Ángulo de salida ϕ_{p_1}

Se debe satisfacer *localmente*,

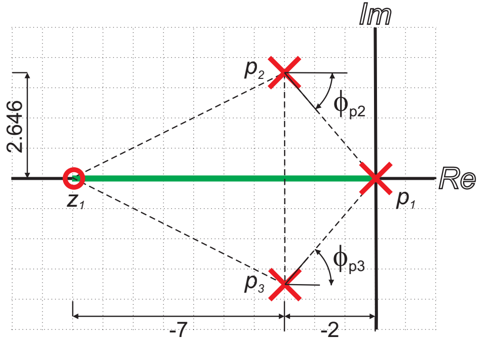
$$\phi_{p_1} + \phi_{p_2} + \phi_{p_3} - \phi_{z_1} = 180^\circ$$

Referido al punto p_1, se tienen

$$\phi_{p_2} = -\alpha$$
$$\phi_{p_3} = \alpha$$
$$\phi_{z_1} = 0$$

donde

$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{2.646}{2}\right) = 52.916^\circ$$



Finalmente

$$\phi_{p_1} = 180^\circ + \phi_{z_1} - \phi_{p_2} - \phi_{p_3} = 180^\circ$$

Solución del Ejercicio 4

7.2. Ángulos de salida ϕ_{p_2} y ϕ_{p_3}

Se debe satisfacer *localmente*,

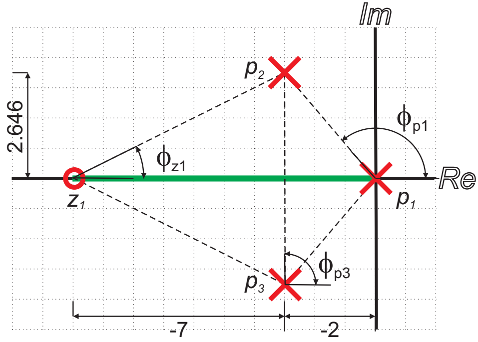
$$\phi_{p_1} + \phi_{p_2} + \phi_{p_3} - \phi_{z_1} = 180^\circ$$

Referido al punto p_2, se tienen

$$\begin{aligned} \phi_{p_1} &= 180^\circ - \alpha \\ \phi_{p_3} &= 90^\circ \\ \phi_{z_1} &= \beta \end{aligned}$$

donde

$$\beta = \text{atan}\left(\frac{2.646}{7}\right) = 20.706^\circ$$



Finalmente

$$\begin{aligned} \phi_{p_2} &= 180^\circ + \phi_{z_1} - \phi_{p_1} - \phi_{p_3} = -16.378^\circ \\ \phi_{p_3} &= 16.378^\circ \end{aligned}$$

Solución del Ejercicio 4

7.3. Ángulo de llegada ϕ_{z_1}

Se debe satisfacer *localmente*,

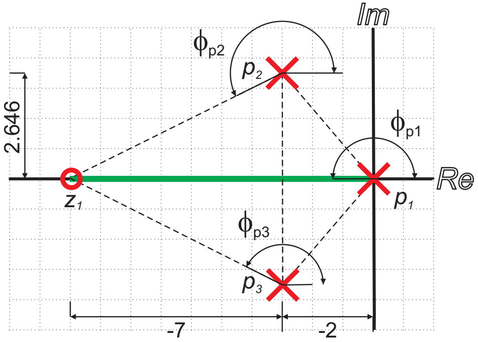
$$\phi_{p_1} + \phi_{p_2} + \phi_{p_3} - \phi_{z_1} = 180^\circ$$

Referido al punto z_1, se tienen

$$\begin{aligned}\phi_{p_1} &= 180^\circ \\ \phi_{p_2} &= 180^\circ + \beta \\ \phi_{p_3} &= 180^\circ - \beta\end{aligned}$$

donde

$$\beta = \text{atan}\left(\frac{2.646}{7}\right) = 20.706^\circ$$



Finalmente

$$\phi_{z_1} = \phi_{p_1} + \phi_{p_2} + \phi_{p_3} - 180^\circ = 0^\circ$$

Solución del Ejercicio 4

8. Intersección del LGR con el Eje Imaginario

$$1 + G(s) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; s(s^2 + 4s + 11) + K(s + 9) = 0$$

Sustituyendo $s = j\omega$,

$$(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 11(j\omega) + K(j\omega) + 9K = 0$$

se debe resolver el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} -4\omega_c^2 + 9K_c &= 0 \\ -\omega_c\left(\omega_c^2 - 11 - K_c\right) &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución *no trivial* es $\omega_c = \pm 4.45$ [rad/s] y $K_c = 8.8$.

Solución del Ejercicio 4

9. Puntos de Ruptura Sobre el Eje Real

$$1 + G(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{s(s^2+4s+11)}{s+9}$$

Utilizando el criterio de la primera derivada

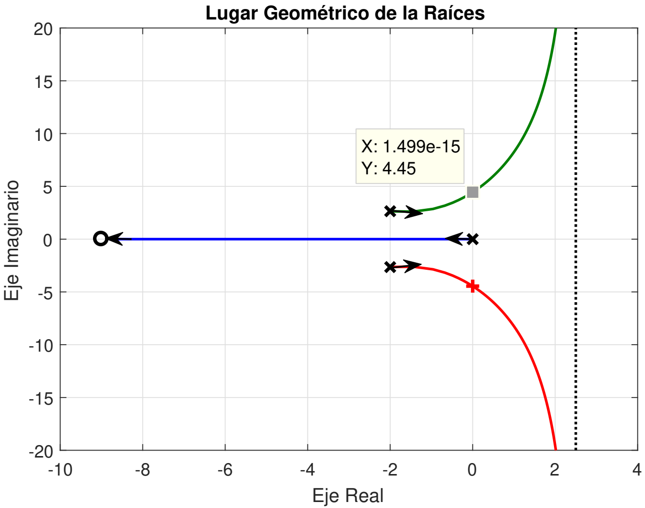
$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s} = \frac{\left(s^2+4s+11+s(2s+4)\right)(s+9) - s(s^2+4s+11)}{(s+9)^2} = 0$$

se deben obtener las raíces del polinomio

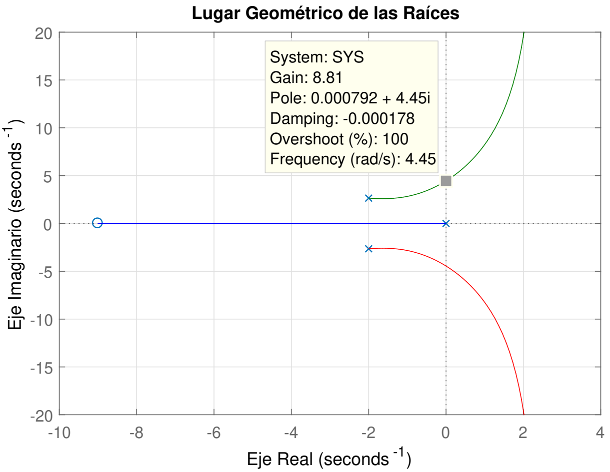
$$2{s_r}^3 + 31{s_r}^2 + 72s_r + 99 = 0 \qquad \begin{cases} s_{r_1} = -13.028 \\ s_{r_2} = -1.235 + j1.507 \\ s_{r_3} = -1.235 - j1.507 \end{cases}$$

ninguno de los puntos pertenece al LGR sobre el eje Real.

Solución del Ejercicio 4



Solución del Ejercicio 4 (Matlab)




```
SYS=tf([1 9],[1 4 11 0]); figure; rlocus(SYS);
```

Ejercicio 5

Bosqueje el **Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)** del sistema cuya función de transferencia discreta es

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+a)}\right\} = K\frac{\alpha z + \beta}{(z-1)(z+\gamma)}$$

con $a > 0$; $\alpha = \frac{-1+aT+e^{-aT}}{a^2}$; $\beta = \frac{1-aTe^{-aT}-e^{-aT}}{a^2}$; $\gamma = -e^{-aT}$. Utilice la gráfica del LGR para determinar los valores de la ganancia $K > 0$ que **garantizan estabilidad de lazo cerrado** para $a = 1$ y $T = 1$ [s].

Solución del Ejercicio 5

Tiempo Continuo

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

Tiempo Discreto

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{K}{s^2(s+a)}\right\} = K\frac{\alpha z + \beta}{(z-1)(z+\gamma)}$$

1. Puntos de Origen

$$z_{p_1} = 1$$
$$z_{p_2} = -\gamma$$

2. Puntos Terminales

$$z_{z_1} = -\frac{\beta}{\alpha}$$
$$z_{z_2} \to \infty$$

3. Grado Relativo

$$N = 2 - 1 = 1$$

4. Ángulo de la Asíntota

$$\theta_0 = 180^\circ(2(0) + 1) = 180^\circ$$

5. Int. de la Asíntota con el Eje Real

$$\sigma = 1 - \gamma + \frac{\beta}{\alpha}$$

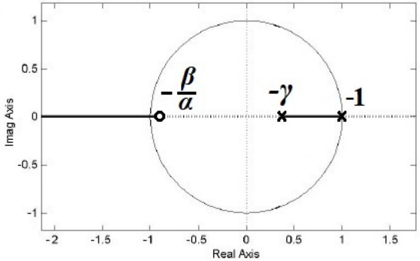
Solución del Ejercicio 5

6. LGR sobre el Eje Real

Intervalo	Numero de polos/ceros	Conclusión
$(-\infty, -\frac{\beta}{\alpha})$	3	Sí pertenece al LGR
$(-\frac{\beta}{\alpha}, -\gamma)$	2	No pertenece al LGR
$(-\gamma, 1)$	1	Sí pertenece al LGR
$(1, \infty)$	0	No pertenece al LGR

7. Ángulos de Salida y Llegada

$$\phi_{p_1} = 180^\circ$$
$$\phi_{p_2} = 0^\circ$$
$$\phi_{z_1} = 180^\circ$$



Solución del Ejercicio 5

8. Intersección del LGR con el Eje Imaginario

$$1 + G(z) = 1 + K \left. \frac{\alpha z + \beta}{(z-1)(z+\gamma)} \right|_{z=j\omega} = 0$$

$$(j\omega)^2 + j\omega(\gamma - 1 + \alpha K) + \beta K - \gamma = 0$$

$$\beta K - \gamma - \omega^2 + j\omega(\gamma - 1 + \alpha K) = 0$$

De donde se obtiene el sistema de ecuaciones,

$$\beta K - \gamma - \omega^2 = 0$$
$$\gamma - 1 + \alpha K = 0$$

cuya solución es $K = \frac{1-\gamma}{\alpha}$, $\omega^2 = \frac{\beta(1-\gamma)}{\alpha} - \gamma$ [rad/s].

Solución del Ejercicio 5

9. Puntos de Ruptura

$$\frac{\mathrm{d}G(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{\alpha z+\beta}{(z-1)\,(z+\gamma)}\right\} = 0$$

$$0 = \alpha(z-1)\,(z+\gamma) - (\alpha z+\beta)(2z+\gamma-1)$$

$$0 = \alpha {z_r}^2 + 2\beta z_r + \beta(\gamma-1) + \alpha\gamma; \qquad z_{r_{1,2}} = \frac{-\beta\pm\sqrt{(\alpha+\beta)(\beta-\alpha\gamma)}}{\alpha}$$

De la E.C. se despeja K y se evalúan los valores de ruptura,

$$K_{r_{1,2}} = -\left.\frac{(z-1)\,(z+\gamma)}{\alpha z+\beta}\right|_{z=z_{r_{1,2}}}$$

Solución del Ejercicio 5

Para $a = 1$, $T = 1$:

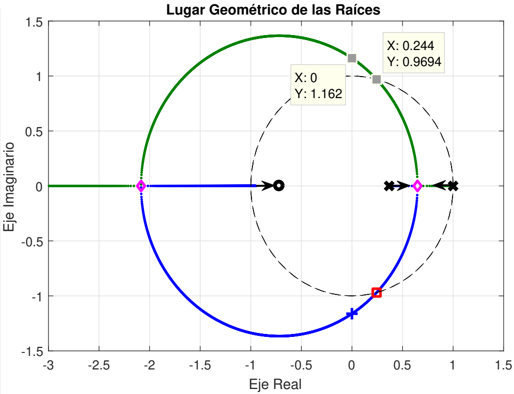
$$\alpha = 0.3679;\ \beta = 0.2642$$
$$\gamma = -0.3679;\ z_{p_1} = 1$$
$$z_{p_2} = 0.3679;\ z_{z_1} = -0.7181$$
$$\theta_0 = 180^\circ;\ \sigma = 2.086$$

Cruce con el eje Imaginario

$$K = 3.7181;\ \omega = \pm 1.1621$$

Puntos de Ruptura

$$z_{r_1} = 0.6479;\ z_{r_2} = -2.0844$$
$$K_{r_1} = 0.1961;\ K_{r_2} = 15.051$$



†En el caso discreto, la intersección del LGR con el eje imaginario (K,ω) no está relacionada con la **estabilidad**.

Solución del Ejercicio 5

Acerca del LGR

- Se obtiene un circunferencia con **centro** en $(z_{z_1}, 0)$ y cuyo **radio** está definido a partir de los **puntos de ruptura**, *i.e.*

$$(x - z_{z_1})^2 + y^2 = \left(\frac{z_{r_1} - z_{r_2}}{2} \right)^2$$

- Cuando $K \geq K_{r_1}$ las raíces se vuelven complejas conjugadas y describen **media circunferencia**; para luego volver a ser reales con $K \geq K_{r_2}$.
- Se tienen dos **circunferencias secantes**, es decir, tienen **dos puntos en común** y la distancia entre sus centros es menor que la suma de sus radios y mayor que su diferencia.

Solución del Ejercicio 5

Cálculo de la Ganancia Crítica

La **intersección entre las dos circunferencias** se obtiene por el método de suma y resta,

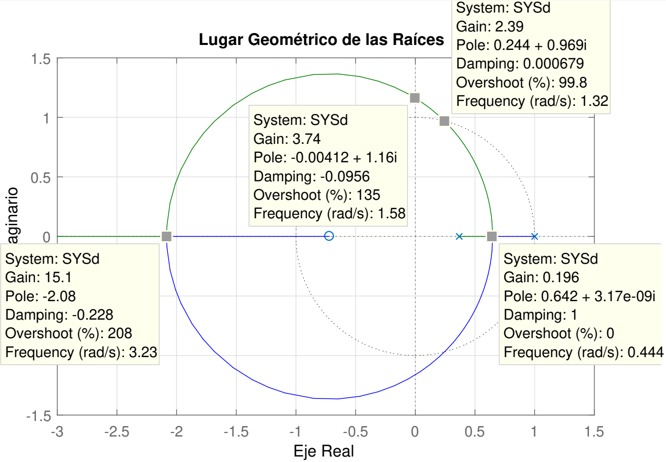
$$\begin{array}{r} \left(x_c + \dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 + {y_c}^2 = \dfrac{(\alpha+\beta)(\beta-\alpha\gamma)}{\alpha^2} \\ -\left({x_c}^2 + {y_c}^2 = 1\right) \\ \hline \dfrac{2\beta}{\alpha}x_c + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} = \dfrac{(\alpha+\beta)(\beta-\alpha\gamma)}{\alpha^2} - 1 \end{array}$$

la solución x_c se sustituye en la ecuación de la circunferencia para obtener $\pm y_c$. La **ganancia crítica de estabilidad** es

$$K_c = -\left.\frac{(z-1)(z+\gamma)}{\alpha z + \beta}\right|_{z = x_c \pm j y_c}$$

† Para el ejemplo $a = 1$ y $T = 1$: $x_c = 0.244$, $y_c = \pm 0.969$; $K_c = 2.392$.

Solución del Ejercicio 5 (Matlab)




```
K=1; a=1; SYS=tf([K],[1 a 0]); Ts=1;
SYSd=c2d(SYS,Ts,'zoh'); figure; rlocus(SYSd);
```

Ejercicio 6

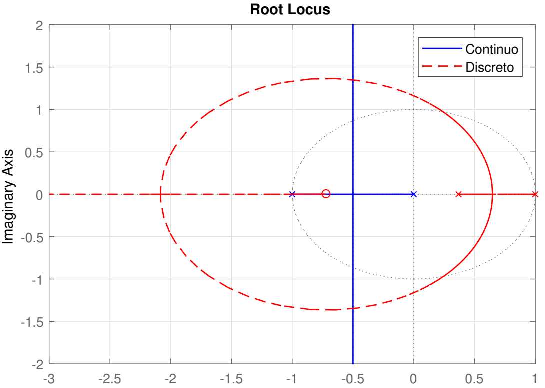
Dada la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)},$$

con $a = 1$. Utilice Matlab para construir un esquema de control para la **regulación automática** de la salida. Compare la **respuesta al escalón** del sistema en lazo cerrado en sus **versiones continua y discreta**, esta última obtenida con el **método del ROC** bajo el paso de muestreo $T = 1$ [s] y $T = 0.1$ [s], respectivamente.

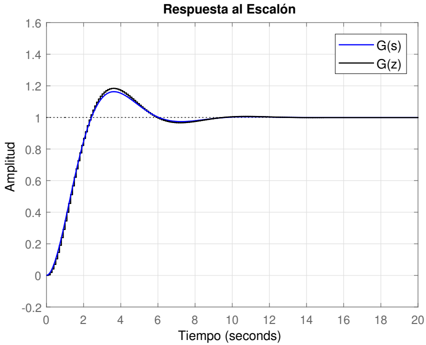
Solución del Ejercicio 6

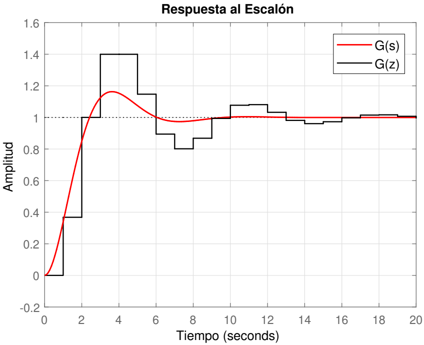
```
K=1; a=1;
G=tf([K],[1 a]);
rlocus(G);
hold on;
T=1;
Gd=c2d(G,T,'zoh');
rlocus(Gd);
```



El sistema en tiempo continuo es **estable en lazo cerrado** para cualquier valor de la ganancia $K > 0$; las raíces son **complejas conjugadas** si $K > \frac{a^2}{4}$. En tiempo discreto con $T = 1$, únicamente los valores de la ganancia $0 < K < 2.392$ garantizan **estabilidad de lazo cerrado**; las raíces son **complejas conjugadas** si $0.2 < K < 15$.

Solución del Ejercicio 6






```
CLP=feedback(G,1);
step(CLP); hold on;
T=0.1;
CLPd=feedback(Gd,1);
step(CLPd);
```

```
CLP=feedback(G,1);
step(CLP); hold on;
T=1;
CLPd=feedback(Gd,1);
step(CLPd);
```