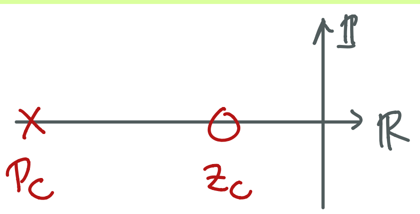
Controladores adelanto-atraso de fase.

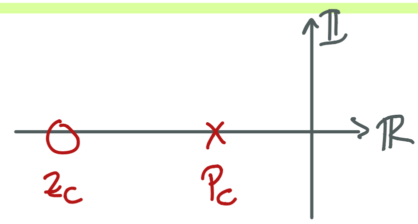
Los controladores de adelanto o atraso de fase son controladores cuya función de transferencia tiene la forma

$$G_c(s) = K\,\frac{s - z_c}{s - p_c}$$

En este caso podemos tener dos combinaciones en la localización del cero y el polo:



Controlador de adelanto de fase



Controlador de atraso de fase

La función de transferencia de cada controlador

$$\boxed{G_c(s) = K_c\,\frac{s - z_c}{s - p_c}}$$

Cada cero y polo, así como la ganancia en cada caso es:

$$z_c = -\frac{1}{T} \quad\Rightarrow\quad \frac{z_c}{p_c} = \alpha$$

$$p_c = -\frac{1}{\alpha T}$$

$$\alpha \in (0,1)$$

Busca mejorar la respuesta transitoria

$$z_c = -\frac{1}{T} \quad\Rightarrow\quad \frac{z_c}{p_c} = \alpha$$

$$p_c = -\frac{1}{\alpha T}$$

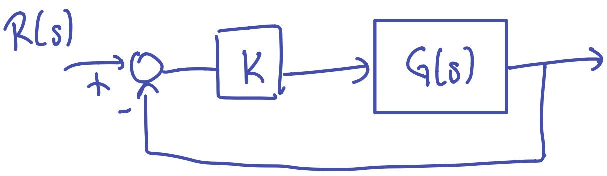
$$\alpha > 1$$

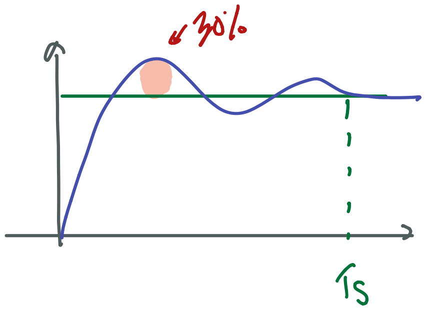
Busca mejorar el error en estado estacionario

Ejemplo. Sea la planta $G(s)=\dfrac{1}{s(s+4)(s+6)}$. Diseñar un controlador tipo P que logre un desempeño en lazo cerrado con una respuesta con un 30% de porcentaje de sobrepaso.

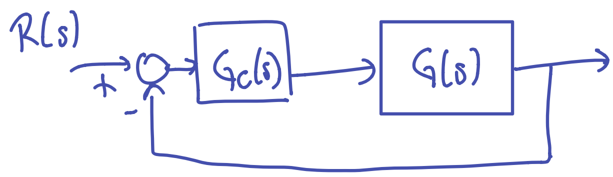
Una vez diseñado, evaluar el tiempo de asentamiento y determinar el polo, cero y la ganancia de un controlador por adelanto de fase que reduzca a la mitad dicho tiempo.

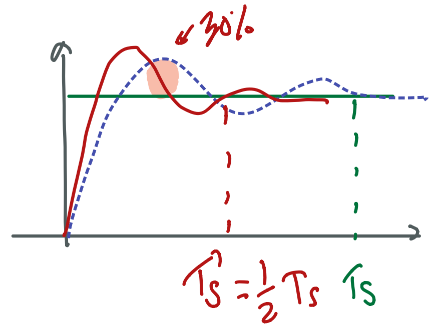
1)



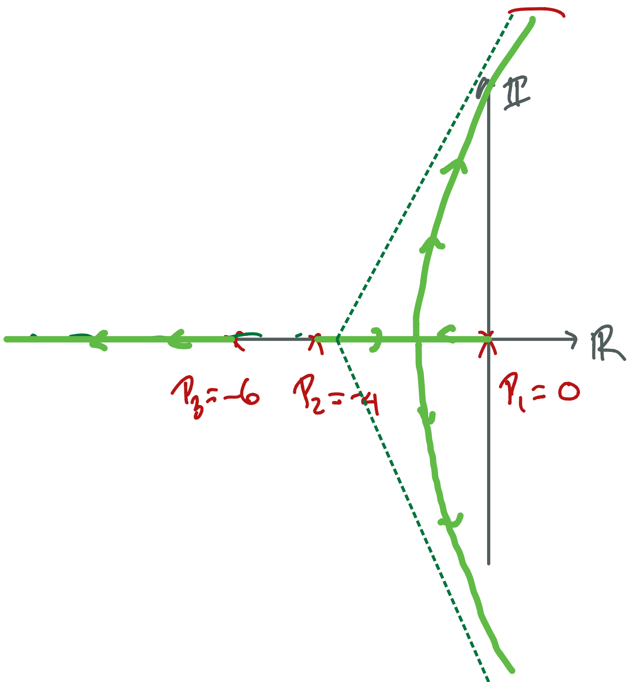


2)





1) Diseño del control P.



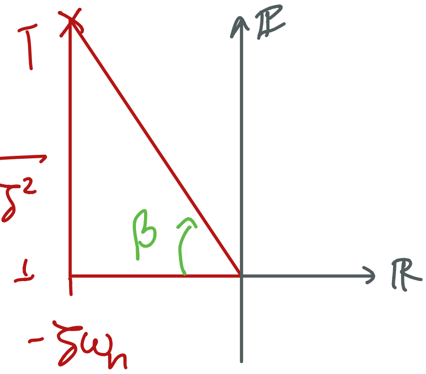
$$G(s)=\frac{1}{s(s+4)(s+6)}$$

Un porcentaje de sobrepaso del 30% corresponde con un factor de amortiguamiento

$$\zeta = 0.3579 \quad \left(\zeta = -\frac{\ln\left(\frac{OS\%}{100\%}\right)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\left(\frac{OS\%}{100\%}\right)}} \right)$$

La línea recta que corresponde con este lugar geométrico de $\zeta = 0.3579$ es:

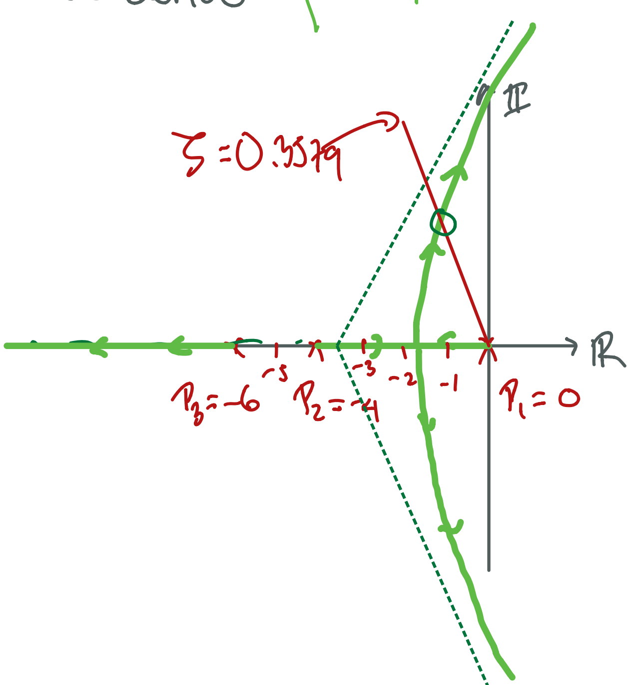
$$s = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,j$$



Para bosquejar la intersección:

$$\tan\beta = \frac{\cancel{\omega_n}\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\cancel{\omega_n}} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \frac{0.9338}{0.3579} = 2.6$$

de donde $\beta = 70°$



Gráficamente, estimamos el polo realimentado en

$$\hat{s}_d = -1.1 + (1.1 \times \underbrace{2.6}_{\tan\beta})j$$

$$\hat{s}_d = -1.1 + 2.86j$$

Al evaluar con Matlab:

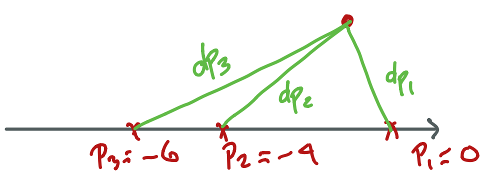
```
>> sd=-1.1+2.86j

sd =

  -1.1000 + 2.8600i

>> angle(evalfr(Gs,sd))*180/pi

ans =

  174.0894
```

Casi cumple con la condición de fase, pero necesitamos mejorar la estimación del cruce.

Buscando con la función rlocus de Matlab, encontramos que el polo deseado es

$$S_d = -1.01 + 2.63j$$

Para determinar la ganancia correspondiente empleamos la condición de magnitud.



$$dp_1 = |Sd - P_1| = 2.8173$$
$$dp_2 = |Sd - P_2| = 3.9821$$
$$dp_3 = |Sd - P_3| = 5.64$$

$$|K||G(s)| = 1 \Rightarrow K = \left| \frac{1}{G(s)} \right|_{s=s_d} = \frac{|s_d-p_1||s_d-p_2||s_d-p_3|}{1} = 63.28$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+6)}$$

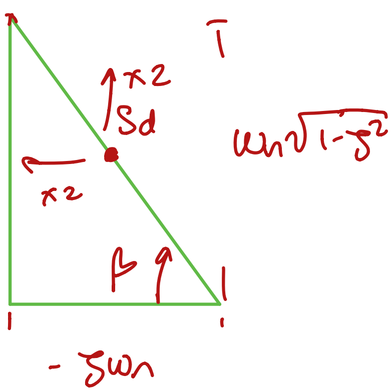
⇒ La ganancia K que logra el desempeño deseado en (1) es $K = 63.28$

El tiempo de asentamiento estimado es

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4}{1.01} = 3.96 \sim 4s.$$

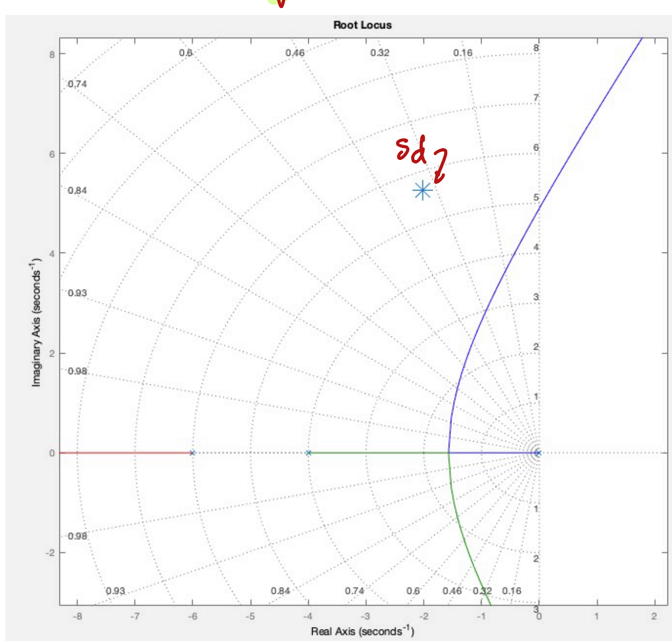
2) Diseño del control de adelanto de fase.

Buscamos ahora los polos dominantes que correspondan con un tiempo de asentamiento de la mitad del logrado con el control tipo P, conservando el mismo porcentaje de sobrepaso:

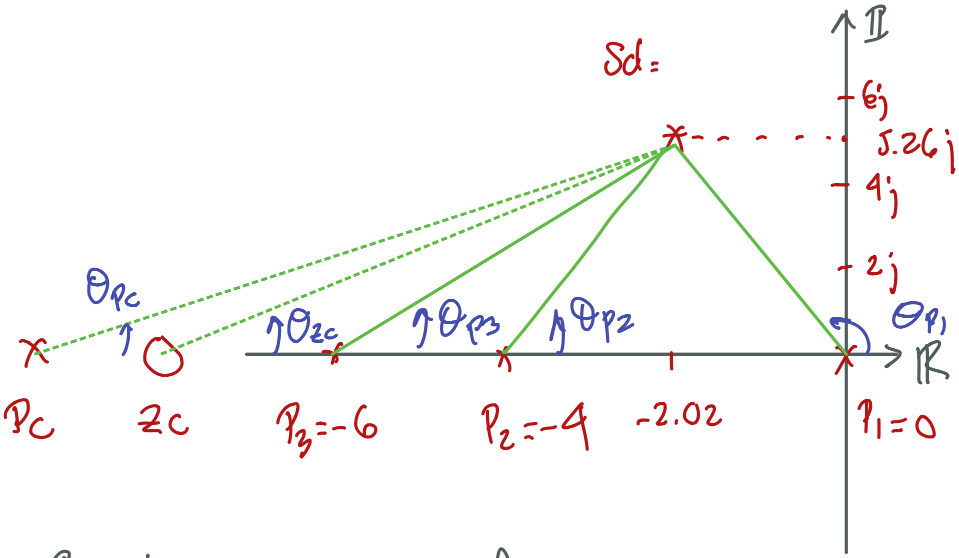


$$s_d = 2(-1.01 + 2.63j) =$$

$$s_d = -2.02 + 5.26j$$



Dado que el nuevo polo deseado no pertenece al LGR, el compensador de adelanto permitirá añadir un cero y un polo tales que hagan que el LGR pase por $s_d = -2.02 + 5.26j$



$$G_c(s) = K \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

$\theta_{p_1} = 111°$

$\theta_{p_2} = 69.37°$

$\theta_{p_3} = 52.88°$

Con la condición de fase:

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = \pm 180°(2k+1)$$

$$\downarrow$$

$$\theta_{zc} - (\theta_{pc} + \theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = \pm 180°(2k+1)$$

$$\downarrow$$

$$\theta_{zc} - \theta_{pc} - 233.26 = \pm 180°(2k+1)$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\theta_{zc} - \theta_{pc}}_{+} = \pm 180°(2k+1) + 233.26° = 53.26°$$

$$\boxed{\theta_{zc} - \theta_{pc} = 53.26°}$$ ← "Deficiencia de ángulo"

Dado que existen 2 grados de libertad (la localización del cero y el polo), una forma de diseñar es primero definir la localización del cero de modo o que cancele un polo de la planta o bien que no se acerque mucho a los polos dominantes deseados.

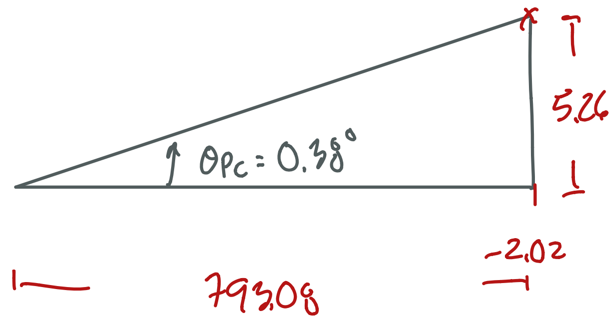
Opción 1. Cancelar el polo de la planta en $p_3 = -6$.

$z_c = -6 \Rightarrow \theta_{z_c} = \theta_{p_3} = 52.88°$

$$\theta_{z_c} - \theta_{p_c} = 53.26°$$

52.88

$\theta_{p_c} = 0.38°$



$\Rightarrow p_c = -793.08 - 2.02$

$$p_c = -795.1$$

← ¡El polo está demasiado alejado de la dinámica del sistema!

El controlador obtenido es:

$$G_c(s) = K \frac{s+6}{s+795.1}$$

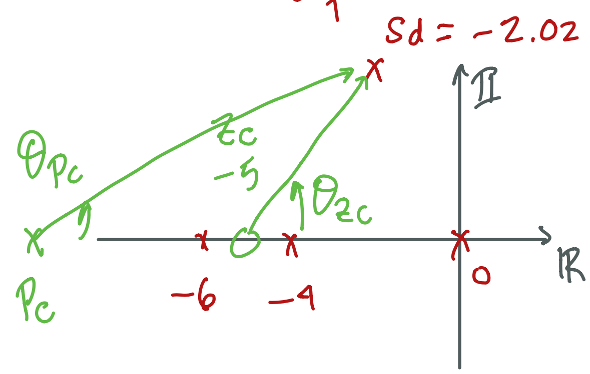
```
>> Gc=zpk(zc,pc,1)

Gc =

    (s+6)
  ---------
  (s+795.1)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> Kc=1/abs(evalfr(Gc*Gs,sd))

Kc =

   2.5116e+04
```

Buscamos K con la condición de magnitud:

$$G_c(s) = 25{,}116 \frac{s+6}{s+795.1}$$

¡Polo muy rápido!

Opción 2. Colocar el cero del controlador entre los polos más a la izquierda de la planta. ($z_c = -5$)

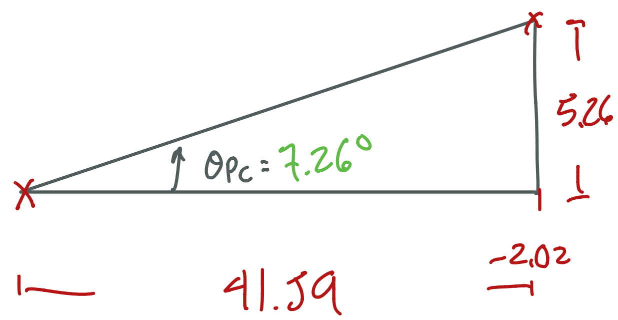


$$\boxed{\theta_{zc} - \theta_{pc} = 53.26^\circ}$$

$$\theta_{zc} = \tan^{-1}\left(\frac{5.26}{-2.02-(-5)}\right) = 60.46^\circ$$

de donde

$$\theta_{pc} = \theta_{zc} - 53.26^\circ = 60.46^\circ - 53.26^\circ = 7.26^\circ$$



$$p_c = -43.61$$

$$p_c = -41.59 - 2.02 = -43.61$$

La función de transferencia del controlador es

$$G_c(s) = K \frac{s+5}{s+43.61}$$

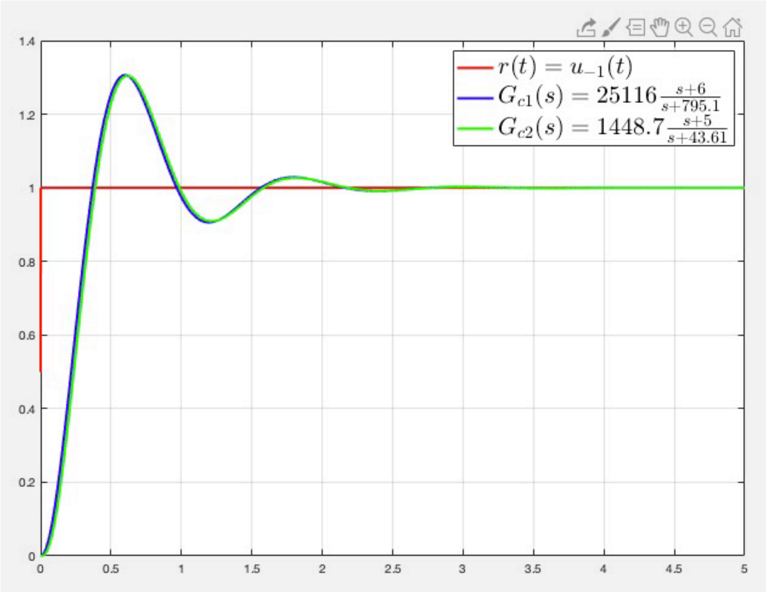
$\Rightarrow$ La ganancia K la determinamos con la condición de magnitud.

```
>> Gc=zpk(zc,pc,1)

Gc =

     (s+5)
   ---------
   (s+43.62)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> Kc=1/abs(evalfr(Gc*Gs,sd))

Kc =

   1.4487e+03
```

Finalmente

$$\boxed{G_c(s) = 1448.7 \frac{s+5}{s+43.61}}$$

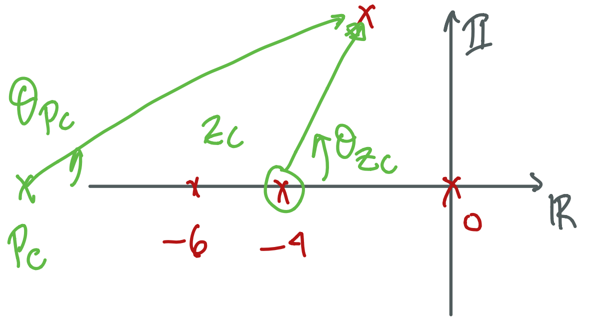
Esta relación de cero/polo es mejor que en el caso anterior, ya que tiene una dinámica más lenta que el anterior (y típicamente $\frac{p_c}{z_c} \sim 10$ o 20 es razonable).



Comparación.

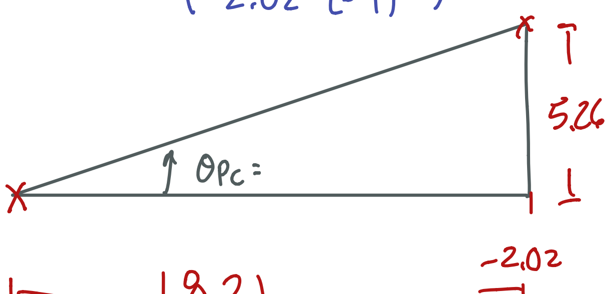
Opción 3. Colocar el cero del controlador tal que cancele el otro polo de la planta en -4 $\quad (z_c = -4)$

$s_d = -2.02 + 5.26j$



$$\theta_{zc} - \theta_{pc} = 53.26°$$

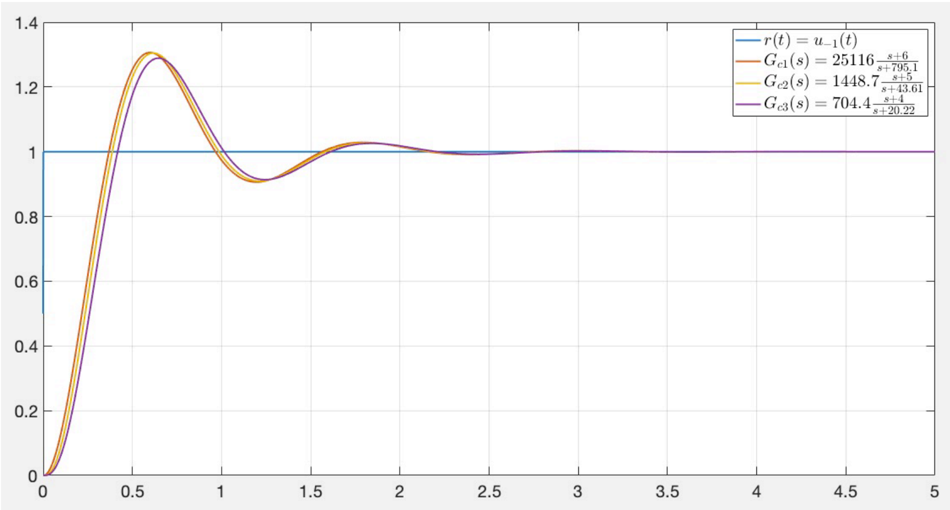
$$\theta_{zc} = \tan^{-1}\left(\frac{5.26}{-2.02-(-4)}\right) = 69.37° \Rightarrow \theta_{pc} = 16.11°$$



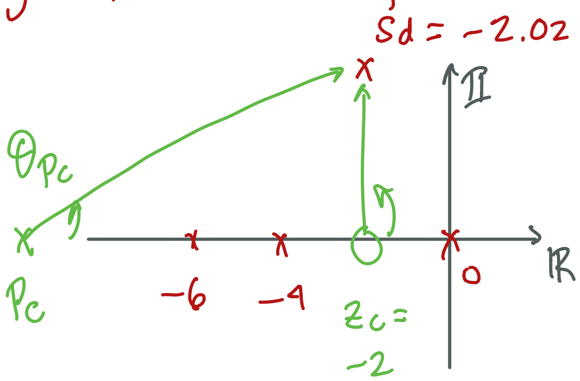
$p_c = -18.21 - 2.02 =$

$p_c = -20.22$

$$G_c(s) = 704.4\,\frac{s+4}{s+20.22}$$



Opción 4. Colocar el cero del controlador debajo del polo deseado y entre los dos polos restantes de la planta ($z_c = -2$)



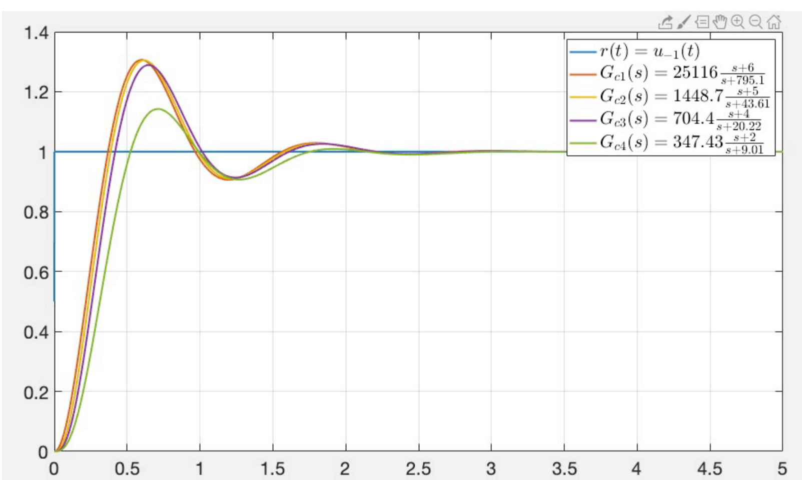
$$\theta_{zc} - \theta_{pc} = 53.26°$$

$$\theta_{zc} = 90.21° \Rightarrow \theta_{pc} = 36.95°$$

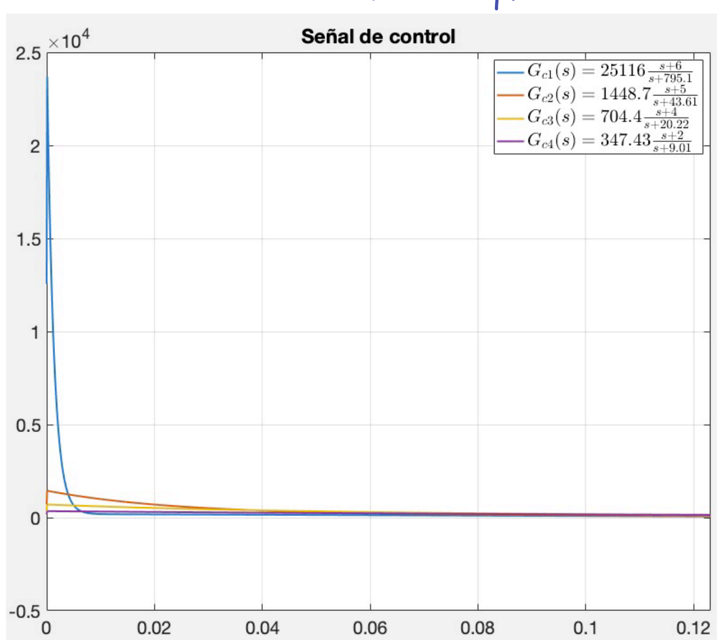
$$\Rightarrow p_c = -9.01$$

$$\Rightarrow K = 347.4$$

$$G_c(s) = 347.43\,\frac{s+2}{s+9.01}$$



Recomendación: Resolver el problema de habilidad (Skill-Assessment Exercise 9.2)



Un controlador con polos más rápidos y K mayor implica una demanda de mayor amplitud en el transitorio a la señal de control, y por lo tanto, el actuador.