CURSO DE
SISTEMAS Y SEÑALES

Elaborado por:
Edgar Tello Paleta

Integral de convolución

La operación convolución entre cualesquiera señales $f(t)$ y $g(t)$, da como resultado otra señal y se define como:

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau) d\tau \qquad (1)$$

Suma de convolución

La operación convolución entre cualesquiera secuencias $f[n]$ y $g[n]$, da como resultado otra secuencia y se define como:

$$y[n] = f[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] g[n-k] \qquad (2)$$

Propiedades de la convolución

Para cualesquiera señales (o secuencias) $x_1,\ x_2,\ x_3,$ y constantes $\alpha,\ \beta,\ t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$; la convolución tiene las propiedades:

1) Conmutativa $\quad x_1 * x_2 = x_2 * x_1$

2) Asociativa $\quad (\ x_1 * x_2\ ) * x_3 = x_1 * (\ x_2 * x_3)$

3) Distributiva $\quad x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$

4) Asociativa con el escalamiento en amplitud

$$(\alpha x_1) * (\beta x_2) = \alpha\beta(x_1 * x_2)$$

5) Desplazamiento con el impulso unitario desplazado

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

Ejemplo

Para las funciones $f(t) = e^{-t^2}$ y $g(t) = \delta(t+4) + \delta(t-4)$, obtener $y(t) = f(t) * g(t)$.

Solución

$$y(t) = f(t) * g(t) = e^{-t^2} * \big(\delta(t+4) + \delta(t-4)\big)$$

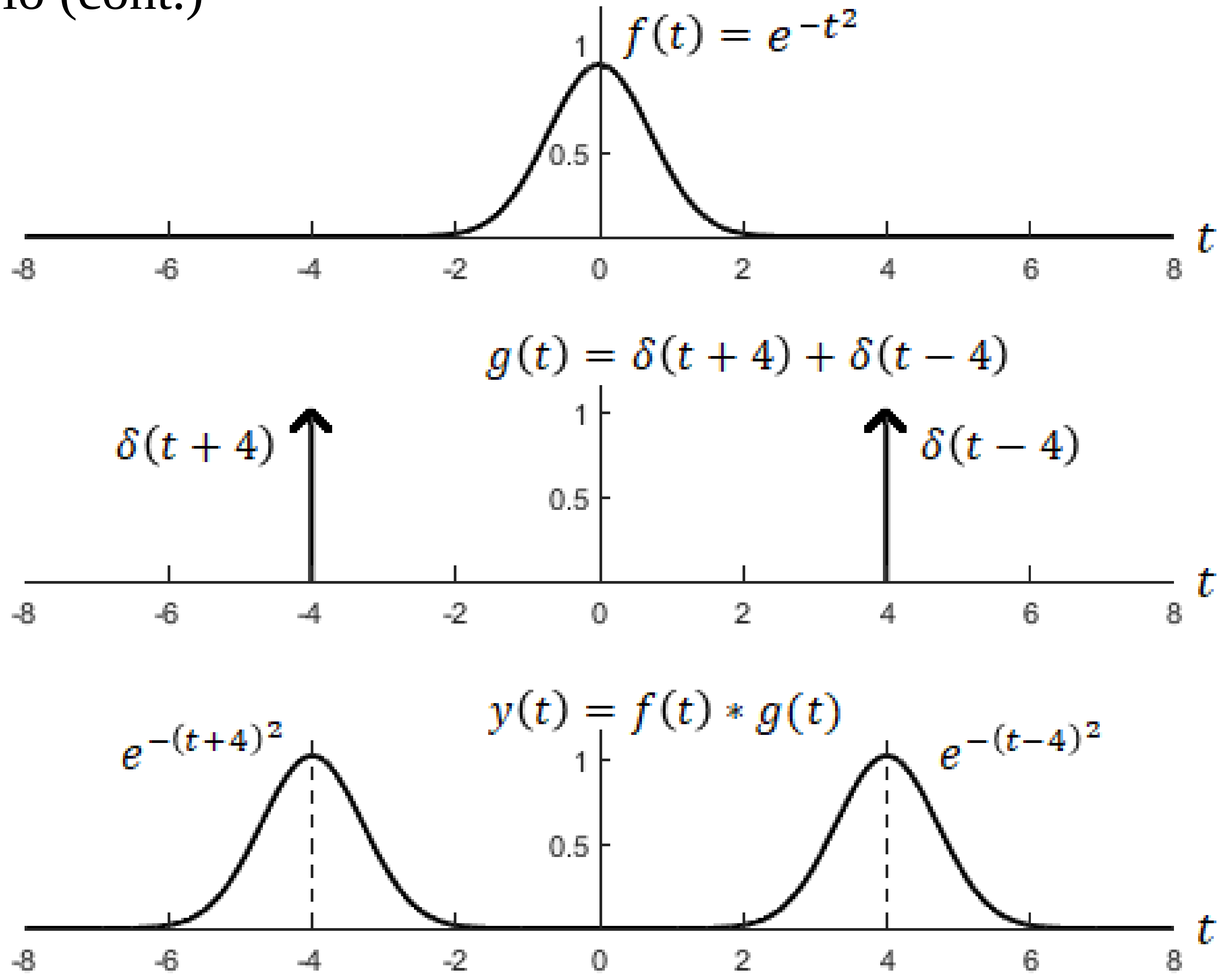
Por la propiedad distributiva de la convolución se tiene que:

$$y(t) = e^{-t^2} * \delta(t+4) + e^{-t^2} * \delta(t-4)$$

Por la prop. de desplazamiento con el impulso unitario se tiene que:

$$y(t) = e^{-(t+4)^2} + e^{-(t-4)^2}$$

Ejemplo (cont.)



2. SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

- Definición

Un sistema lineal e invariante en el tiempo (sistema LTI) continuo o discreto es aquel que posee las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo. De aquí en adelante, el curso se enfocará en el análisis de este tipo de sistemas.

Modelado de sistemas LTI en el dominio del tiempo

Se puede demostrar que las características de cualquier sistema LTI están completamente determinadas por su respuesta al impulso unitario (denominada $h(t)$ en el caso continuo y $h[n]$ en el caso discreto):

Sistema LTI continuo

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;h(t)\;} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) \underbrace{* \, h(t)}_{T}$$

Sistema LTI discreto

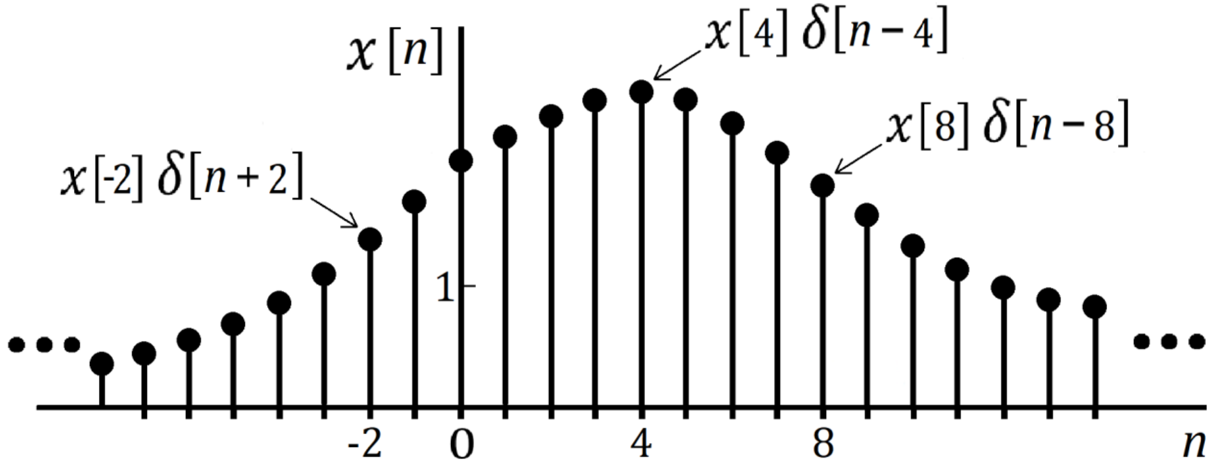
$$x[n] \longrightarrow \boxed{\;h[n]\;} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] \underbrace{* \, h[n]}_{T}$$

Demostración de $y[n] = x[n] * h[n]$ para un sistema LTI discreto

Cualquier secuencia $x[n]$ se puede representar como una combinación lineal de impulsos unitarios desplazados $\delta[n-k]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$



Sea un sistema discreto LTI con regla de correspondencia $T\{\cdot\}$, y con respuesta al impulso $h[n]=T\{\delta[n]\}$. La respuesta del sistema T a una secuencia $x[n]$ cualquiera está dada por:

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\},$$

como T es un sistema lineal se tiene que

$$T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,T\{\,\delta[n-k]\,\},$$

como T es un sistema invariante con respuesta al impulso $h[n]$,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = x[n] * h[n] \qquad \mathrm{Q.E.D.}$$

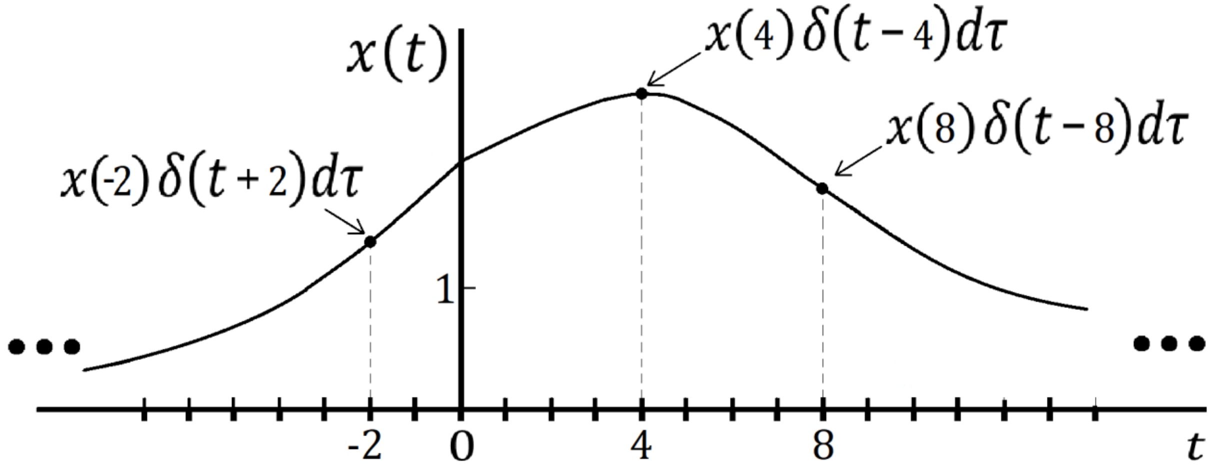
De la ecuación anterior se tiene que $T\{\cdot\} = * \, h[n]$

Nótese que $T\{\delta[n]\} = \delta[n] * h[n] = h[n]$, como era de esperarse.

<u>Demostración de</u> $y(t) = x(t) * h(t)$ <u>para un sistema LTI continuo</u>

Cualquier señal $x(t)$ se puede representar como una combinación lineal de "pulsos unitarios" desplazados $\delta(t-\tau)d\tau$, de ancho infinitesimal:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)d\tau$$



Sea un sistema continuo LTI con regla de correspondencia $T\{\cdot\}$, y con respuesta al impulso $h(t) = T\{\delta(t)\}$. La respuesta del sistema T a una señal $x(t)$ cualquiera está dada por:

$$y(t) = T\{x(t)\} = T\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\},$$

como T es un sistema lineal se tiene que

$$T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)T\{\delta(t-\tau)\}\, d\tau,$$

como T es un sistema invariante con respuesta al impulso $h(t)$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \qquad \text{Q. E. D.}$$

De la ecuación anterior se tiene que $T\{\cdot\} = * \, h(t)$

Nótese que $T\{\delta(t)\} = \delta(t) * h(t) = h(t)$, como era de esperarse.

Ejemplo

Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = u(t)$.

Solución

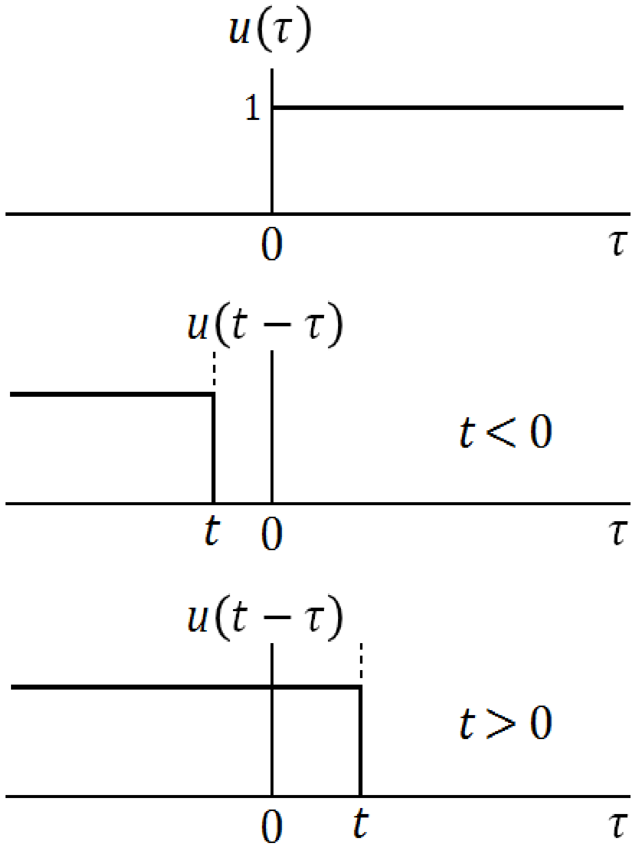
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-2\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-2\tau}\, 0 d\tau = 0 \;\text{ para }\; t < 0$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} 2e^{-2\tau}\, 1 d\tau \;\text{ para }\; t \geq 0$$

$$= [-e^{-2\tau}]_{\tau=0}^{t} = -e^{-2t} + 1$$

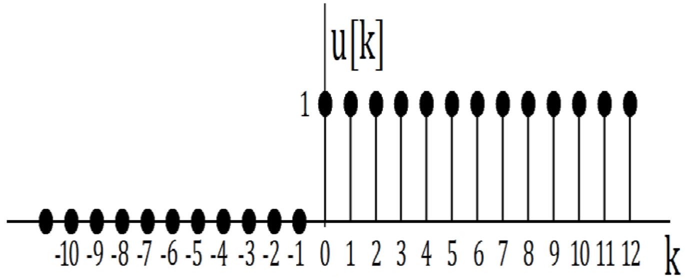


Finalmente: $y(t) = [1 - e^{-2t}]u(t)$ para $-\infty < t < +\infty$

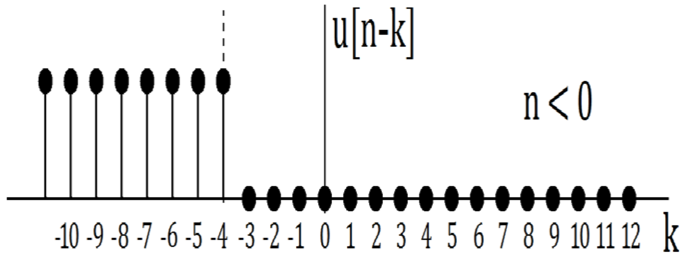
Ejemplo (continuación)
Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n] = 0.5^n u[n]$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x[n] = u[n]$.

Solución

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

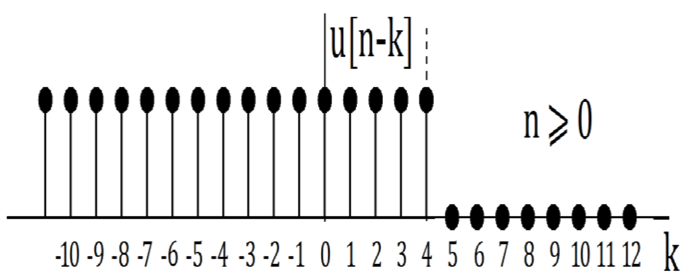


$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0.5^k u[k]u[n-k]$$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0.5^k 0 = 0 \quad \text{para} \quad n < 0$$

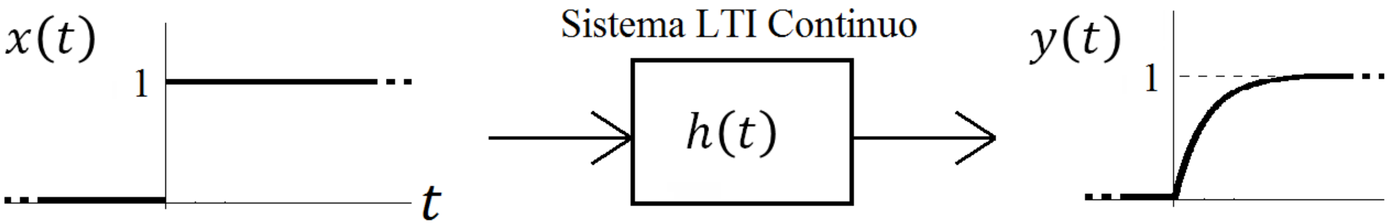
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} 0.5^k = \frac{1 - 0.5^{n+1}}{1 - 0.5} \quad n \geq 0$$



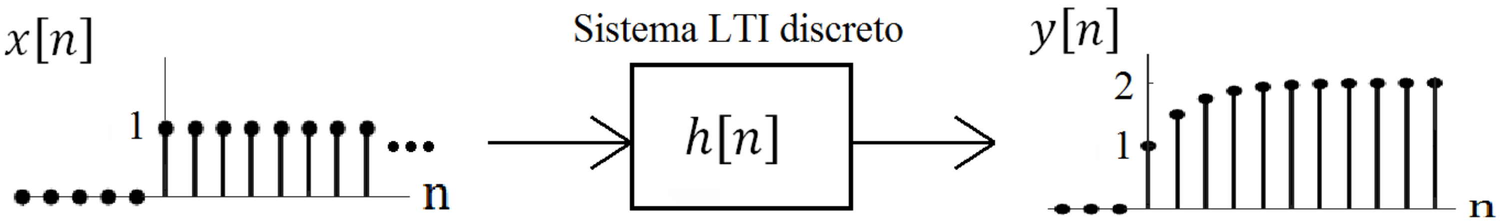
$$= 2[1 - 0.5(0.5^n)] \;\; \text{para} \;\; n \geq 0$$

Finalmente: $y[n] = [2 - 0.5^n]u[n]$ para $-\infty < n < +\infty$

Ejemplo (continuación)



$x(t) = u(t)$ $\qquad$ $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$ $\qquad$ $y(t) = x(t) * h(t) = [1 - e^{-2t}]u(t)$



$x[n] = u[n]$ $\qquad$ $h[n] = 0.5^n u[n]$ $\qquad$ $y[n] = x[n] * h[n] = [\,2 - 0.5^n\,]u[n]$

En el tema 3, utilizando la transformada de Laplace (transformada Z), se verá un método muy eficiente para determinar $y(t) = x(t) * h(t)$ ($y[n] = x[n] * h[n]$).

Para la respuesta de un sistema LTI continuo o discreto se tiene que:

$$y = y_p + y_h$$

y_p es la respuesta permanente del sistema y persiste mientras dure la entrada.
y_h es la respuesta transitoria del sistema y tiende a 0 conforme t ó n tiende a infinito, cuando el sistema es estable.

Ejemplo
Para las respuestas de los sistemas LTI en el ejemplo anterior se tiene que:

$$y(t) = \underbrace{u(t)}_{y_p(t)} + \underbrace{-e^{-2t}u(t)}_{y_h(t)}$$

$$y[n] = \underbrace{2u[n]}_{y_p[n]} + \underbrace{-0.5^n u[n]}_{y_h[n]}$$

Función de transferencia de sistemas continuos LTI

Como ya se estudió, para un sistema LTI continuo, con respuesta al impulso $h(t)$, se tiene en el dominio del tiempo que:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Aplicando la T. de Laplace y su propiedad de convolución a la ec. anterior, se tiene en el dominio de la transformada que:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ es la <u>función de transferencia del sistema</u>.

Ejemplo
Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = u(t)$.

Sol.
De tablas de la transformada de Laplace tiene que:

$$X(s) = \frac{1}{s} \quad \text{y} \quad H(s) = 2\frac{1}{s+2}$$

Entonces

$$Y(s) = X(s)H(s) = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{2}{s+2}\right)$$

Como $Y(s)$ es un función racional propia, para obtener $y(t)$ median-te el uso de tablas de la T. de Laplace, se procede a realizar la expan-sión en fracciones parciales de $Y(s)$:

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $s(s+2)$ se obtiene:

$$2 = A(s+2) + Bs$$

De la ec. anterior

con $\quad s = 0, \qquad 2 = A(2) \quad \Rightarrow \quad A = 1$

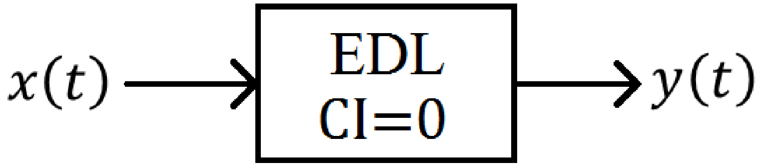
con $\quad s = -2, \qquad 2 = B(-2) \quad \Rightarrow \quad B = -1$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

Aplicando la T. Inversa a la ec. anterior, "por tablas", se obtiene:

$$y(t) = u(t) - e^{-2t}u(t) = [1 - e^{-2t}]u(t)$$

Una ecuación diferencial lineal (EDL) de coeficientes constantes de orden N junto con condiciones iniciales nulas (CI $= 0$), también describe un sistema LTI causal:



$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\text{CI nulas} \qquad \frac{d^k y(0)}{dt^k} = 0, \qquad k = 0, 1, .., N-1$$

En un sistema modelado por una EDL junto con CI$=$0, a $y(t)$ se le conoce como respuesta forzada del sistema.

Para obtener $H(s)$ en el caso de un sistema LTI continuo representado mediante una EDL junto con CI nulas:

Se aplica la T. de Laplace a ambos lados de la EDL

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y de diferenciación de la T. de Laplace en ambos lados de la ecuación anterior se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

o bien $$Y(s)\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s)\sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

Finalmente, de la ecuación anterior se obtiene:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = P(s)}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = Q(s)}$$

Las raíces del polinomio $P(s)$ se conocen como los ceros del sistema. Las raíces del polinomio $Q(s)$ se conocen como los polos del sistema. En el plano s, cada cero se representa con una "o" y cada polo se representa con una "×".

Teorema de estabilidad

Un sistema causal con $H(s)$ racional es estable, si y solo si todos los polos de $H(s)$ se ubican en la parte izquierda del plano s (i.e. todos los polos tienen parte real negativa).

Discretización de la derivada mediante la diferencia hacia atrás

La derivada de una señal $y_c(t)$ se puede aproximar como:

$$y_c{}'(t) \approx \frac{y_c(t) - y_c(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Mediante muestreo con periodo $T = \Delta t$, de la expr. anterior se tiene que:

$$y_c{}'(nT) \approx \frac{y_c(nT) - y_c(nT - T)}{T}$$

Tolerando el error en el que se incurre y considerando la notación $x[n] = x_c(nT)$, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$y'[n] = \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$$

La secuencia $y'[n]$ es la diferencia hacia atrás de $\frac{1}{T}y[n]$ y es una aprox. en tiempo discreto de $y_c{}'(t)$, la derivada de la señal $y_c(t)$.

Además, aplicando la T. Z a ambos lados de la ec. anterior se tiene que:

$$Y'(z) = \frac{Y(z) - z^{-1}Y(z)}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T}Y(z)$$

O bien

$$Y'(z) = \frac{z-1}{Tz}\, Y(z) \qquad \text{(d1)}$$

La ecuación anterior aproxima en tiempo discreto y en el dominio de la transformada Z, a la operación derivada del tiempo continuo que es representada en el domino de Laplace mediante la ecuación:

$$Y_c{}'(s) = sY_c(s)$$

Nótese que para $y''[n]$, la sec. de muestras de $y_c{}''(t)$, se tiene que:

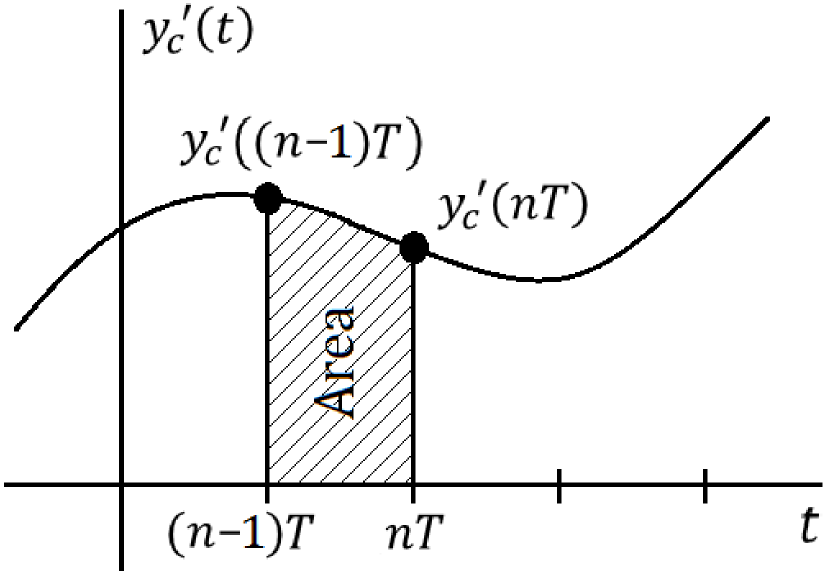
$$\mathcal{Z}\{y''[n]\} = Y''(z) = \frac{z-1}{Tz}\left(\frac{z-1}{Tz}Y(z)\right) = \left(\frac{z-1}{Tz}\right)^2 Y(z)$$

Discretización de la derivada mediante integración núm. trapezoidal

Area del trapecio

A=(b+B)h/2

b: base menor
B: base mayor
h: altura



De la regla de Barrow:

$$\int_{(n-1)T}^{nT} y_c{}'(t)dt = y_c(nT) - y_c\big((n-1)T\big) \qquad \text{(d2)}$$

Aproximando la integral anterior de forma trapezoidal se obtiene:

$$\int_{(n-1)T}^{nT} y_c{}'(t)dt \approx \frac{T}{2}\left[y_c{}'(nT) + y_c{}'\big((n-1)T\big)\right] \qquad \text{(d3)}$$

Tolerando el error en el que se incurre, se iguala (d2) con (d3):

$$y_c(nT) - y_c\big((n-1)T\big) = \frac{T}{2}\big[y_c{}'(nT) + y_c{}'\big((n-1)T\big)\big] \qquad \text{(d4)}$$

Considerando un periodo de muestreo T, a partir de la señales $y_c(t)$ y $y_c{}'(t)$ es posible obtener sus versiones discretas, las secuencias

$$y[n] = y_c(nT) \quad y \quad y'[n] = y_c{}'(nT)$$

Considerando las 2 ec. anteriores, la ec. (d4) se puede reescribir como:

$$y[n] - y[n-1] = \frac{T}{2}(y'[n] + y'[n-1])$$

Aplicando la T. Z a ambos lados de la ec. anterior se tiene que:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = \frac{T}{2}[Y'(z) + z^{-1}Y'(z)]$$

O bien

$$Y(z)[1 - z^{-1}] = \frac{T}{2} Y'(z)[1 + z^{-1}]$$

Es decir

$$Y(z)[z - 1] = \frac{T}{2} Y'(z)[z + 1]$$

De la ecuación anterior se tiene que:

$$Y'(z) = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} Y(z) \qquad \text{(d5)}$$

La ecuación anterior aproxima en tiempo discreto y en el dominio de la transformada Z, a la operación derivada del tiempo continuo que es representada en el domino de Laplace mediante la ecuación:

$$Y_c{}'(s) = sY_c(s)$$

Ejemplo
Usando integración numérica trapezoidal como aproximación discreta de la derivada, obtener la $H(z)$ del sistema discreto que aproxime un sistema LTI continuo, definido por la siguiente ecuación diferencial:

$$y_c''(t) + \alpha\, y_c'(t) + \beta\, y_c(t) = \gamma\, x_c(t) \qquad \text{(d6)}$$

Sol.
Muestreando las señales en la ec. anterior cada T segundos se obtiene:

$$y_c''(nT) + \alpha\, y_c'(nT) + \beta\, y_c(nT) = \gamma\, x_c(nT)$$

O bien

$$y''[n] + \alpha\, y'[n] + \beta\, y[n] = \gamma\, x[n]$$

Aplicando la T. Z a ambos lados de la ecuación anterior se tiene que:

$$Y''(z) + \alpha\, Y'(z) + \beta\, Y(z) = \gamma\, X(z)$$

Utilizando de forma sucesiva la ec. (d5), de la ec. anterior se tiene que:

$$\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^2 Y(z) + \alpha\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)Y(z) + \beta\, Y(z) = \gamma X(z)$$

Finalmente, de la ecuación anterior se tiene que:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\gamma}{\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \alpha\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right) + \beta} \qquad \text{(d7)}$$

<u>Discretización de sistemas LTI mediante la Transformada Bilineal</u>

Partiendo del ejemplo anterior y utilizando la T. de Laplace, de la ecuación (d6) se tiene que:

$$H_c(s) = \frac{\gamma}{s^2 + \alpha\, s + \beta}$$

Al comparar la ecuación anterior con la ecuación (d7) se tiene que:

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

En la expresión anterior (valida también para $N > 2$) a la ecuación:

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \qquad \text{(d8)}$$

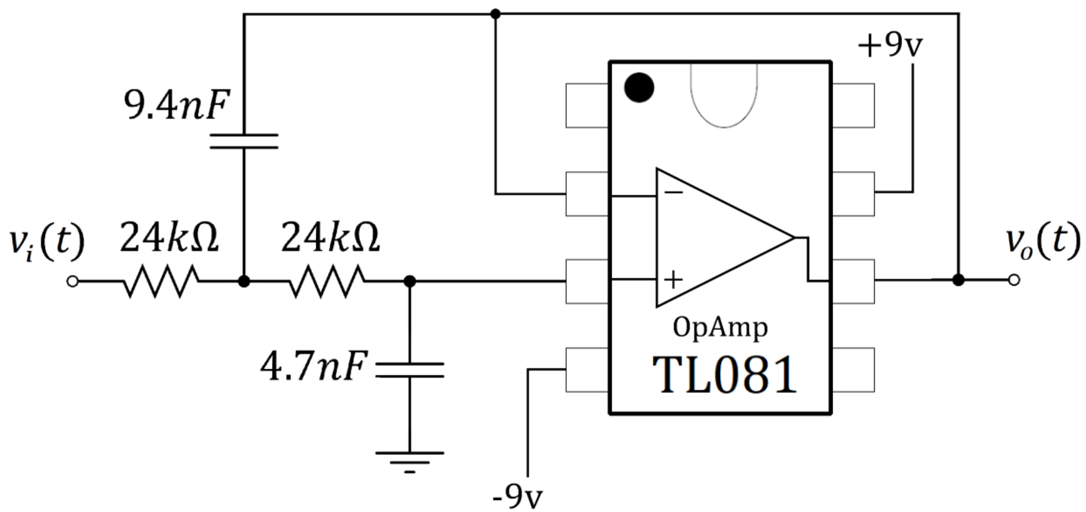
Se le conoce como la Transformada bilineal entre los planos **s** y **z**.

Si se aproxima la derivada de una señal $x_c(t)$ mediante la primera diferencia hacia atrás de su secuencia de muestras $x[n]$, ver ec. (d1), es posible obtener otra discretización de la operación derivada dada por la ecuación:

$$s = \frac{z-1}{Tz} \qquad \text{(d9)}$$

que se conoce como la T. salto hacia atrás entre los planos **s** y **z**.

Ejemplo



El circuito eléctrico mostrado en la figura anterior implementa un sistema LTI continuo (filtro paso-bajas Butterworth de orden 2 con frec. de corte $F_c = 1000[\text{Hz}]$) con función de transferencia:

$$H_c(s) = \frac{a^2}{s^2 + \sqrt{2}\, a\, s + a^2}, \qquad a = 2\pi 1000$$

Con $F_s = 44.1[k\text{Hz}]$, discretizar el sistema anterior utilizando la transformada bilineal y obtener la EDL correspondiente.

Solución

Con la transformada bilineal es posible discretizar un sistema LTI continuo hacia un sistema discreto LTI IIR mediante la ecuación:

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

Para el problema a resolver:

$$H(z) = \frac{a^2}{s^2 + \sqrt{2}\, a\, s + a^2}\Bigg|_{s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

$$H(z) = \frac{a^2}{\left(\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right)^2 + \sqrt{2}\, a \left(\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right) + a^2}$$

$$H(z) = \frac{a^2(z+1)^2}{\frac{4}{T^2}(z-1)^2 + 2\sqrt{2}\frac{a}{T}\ (z-1)(z+1) + a^2(z+1)^2}$$

$$= \frac{a^2(z^2+2z+1)}{\frac{4}{T^2}(z^2-2z+1) + \frac{2\sqrt{2}a}{T}(z^2-1) + a^2(z^2+2z+1)}$$

$$= \frac{z^2+2z+1}{\frac{4}{a^2T^2}(z^2-2z+1) + \frac{2\sqrt{2}}{aT}(z^2-1) +\ (z^2+2z+1)}$$

$$= \frac{z^2+2z+1}{\left(\frac{4}{(aT)^2} + \frac{2\sqrt{2}}{aT} + 1\right)z^2 + \left(2 - \frac{8}{(aT)^2}\right)z + \left(\frac{4}{(aT)^2} - \frac{2\sqrt{2}}{aT} + 1\right)}$$

Con $Fs = 44100$ ($T = 1/44100$) y como $a = 2\pi 1000$, la ecuación anterior se reduce a

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{218z^2 - 392z + 178.2}$$

A continuación se obtiene la ecuación en diferencias correspondiente a $H(z)$:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{218 - 392z^{-1} + 178.2z^{-2}}$$

$$(218 - 392z^{-1} + 178.2z^{-2})Y(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2})X(z)$$

O bien

$$218y[n] - 392y[n-1] + 178.2y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

En la práctica los sistemas FIR se implementan mediante la suma de convolución, mientras que los sistemas IIR (como el que se obtuvo en el ejemplo anterior) se implementan mediante ecuaciones en diferencias en su forma recursiva.

Con $N > 0$, la ec. (5) puede reescribirse <u>en su forma recursiva</u> como:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right), \qquad (6)$$

La ecuación (6) expresa el valor de la salida en el instante n, en función de la señal de entrada y de N valores previos de la señal de salida.

Ejemplo

Para el sistema LTI descrito por la EDL de orden 2

$$y[n] - 2y[n-1] + 4y[n-2] = 2x[n] + 5x[n-1] - 3x[n-2]$$

Considerando la entrada $x[n] = \{\ 1, 2, 3\ \}$, obtener $y[n]$ para n = 0, 1, 2, 3, 4.

Sol.

Primero se reescribe la ec. en diferencias en su forma recursiva:

$$y[n] = 2x[n] + 5x[n-1] - 3x[n-2] + 2y[n-1] - 4y[n-2]$$

Como el sistema es LTI se consideran CI nulas: $y[-1] = y[-2] = 0$.

Entonces se procede a obtener $y[n]$ para n = 0, 1, 2, 3, 4:

$$y[n] = 2x[n] + 5x[n-1] - 3x[n-2] + 2y[n-1] - 4y[n-2]$$

$$\begin{aligned} y[0] &= 2x[0] + 5x[-1] - 3x[-2] + 2y[-1] - 4y[-2] \\ &= 2 \times 1 + 5 \times 0 - 3 \times 0 + 2 \times 0 - 4 \times 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[1] &= 2x[1] + 5x[0] - 3x[-1] + 2y[0] - 4y[-1] \\ &= 2 \times 2 + 5 \times 1 - 3 \times 0 + 2 \times 2 - 4 \times 0 = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[2] &= 2x[2] + 5x[1] - 3x[0] + 2y[1] - 4y[0] \\ &= 2 \times 3 + 5 \times 2 - 3 \times 1 + 2 \times 13 - 4 \times 2 = 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[3] &= 2x[3] + 5x[2] - 3x[1] + 2y[2] - 4y[1] \\ &= 2 \times 0 + 5 \times 3 - 3 \times 2 + 2 \times 31 - 4 \times 13 = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[4] &= 2x[4] + 5x[3] - 3x[2] + 2y[3] - 4y[2] \\ &= 2 \times 0 + 5 \times 0 - 3 \times 3 + 2 \times 19 - 4 \times 31 = -95 \end{aligned}$$

$$y[n] = \{\, 2,\ 13,\ 31,\ 19, -95, \ldots \}$$

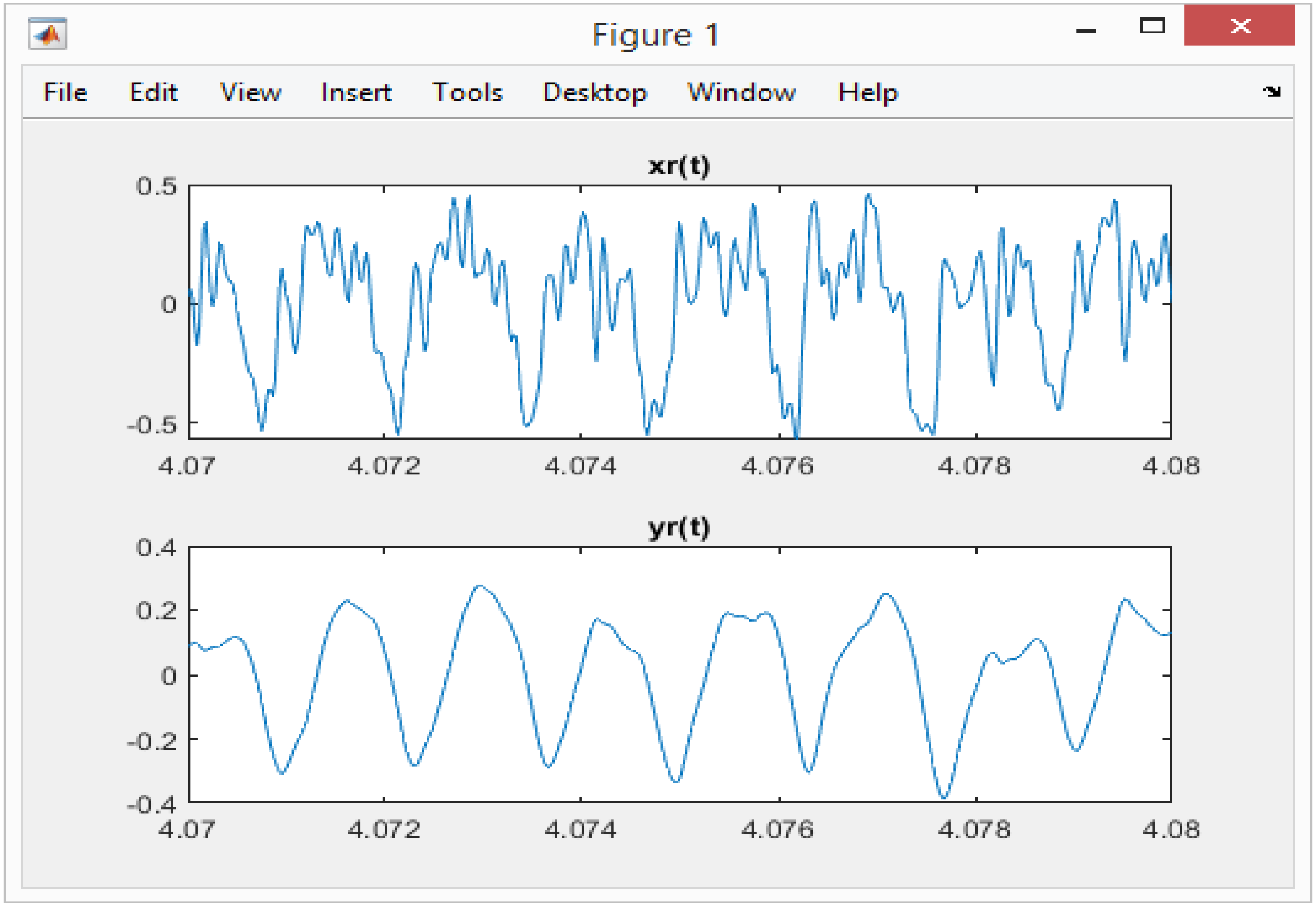
```
%y = f_recN2(a,b,x)  resuelve de forma recursiva la EDL
%    a0y[n]+a1y[n-1]+a2y[n-2] = b0x[n]+b1x[n-1]+b2x[n-2]
%Recibe a = [ a0  a1  a2 ], b = [ b0  b1  b2 ],
%Recibe x[n] de longitud Lx y devuelve y[n] de longitud Lx

function y = f_recN2(a,b,x)
   xn_1 = 0;  % x[n] casual
   xn_2 = 0;  % x[n] casual
   yn_1 = 0;  % sistema LTI causal => CIs=0
   yn_2 = 0;  % sistema LTI causal => CIs=0
   Lx = length(x);    % Longitud de la secuencia x[n]
   y = zeros(1,Lx);   % para los PRIMEROS Lx VALORES de y[n]

   for n = 1 : 1 : Lx
      y(n)=b(1)*x(n)+b(2)*xn_1+b(3)*xn_2-a(2)*yn_1-a(3)*yn_2;
      y(n) = (1/a(1))*y(n); % división entre coeficiente a0

      yn_2 = yn_1;
      yn_1 = y(n);
      xn_2 = xn_1;
      xn_1 = x(n);
   end
end
```

Función en Matlab que implementa la ec. (6) para $N = 2$.

```matlab
[xLR,Fs] = audioread('x_kitt.wav');            %formato wav,mp3,m4a
x = mean(xLR,2).';   %obtención x[n]=xc(nT) monoaural. 2=>prom cols

ak = [ 218, -392, 178.2 ];
bk = [ 1, 2, 1 ];
y = f_recN2(ak,bk,x);               %aplicación de un sistema IIR, N=2

Lx = length(x);                   %num de muestras en x[n]
n = 0:1:Lx-1;                     %Arreglo de indices de tiempo discreto
t1 = 4.07;                        %Instante inicial a desplegar en [seg]
t2 = t1 + 10/1000;                %Instante final a desplegar en [seg]
figure
subplot(2,1,1)
plot( n*(1/Fs), x )                 %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( [t1,t2] )
title('xr(t)')
subplot(2,1,2)
plot( n*(1/Fs), y(1:Lx) )           %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( [t1,t2] )
title('yr(t)')

%La tarjeta de sonido interpola a:
player = audioplayer( x, Fs );
playblocking(player);                   %x[n] para reproducir xr(t)
player = audioplayer( y, Fs );
playblocking(player);                   %y[n] para reproducir yr(t)
```

Código de Matlab que aplica a una señal de audio el sistema IIR:

$$218y[n] - 392y[n-1] + 178.2y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$



Señales de audio muestreadas a Fs = 44100[Hz]

Ejemplo

Obtener la función de transferencia $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ para el circuito eléctrico mostrado en la siguiente figura:

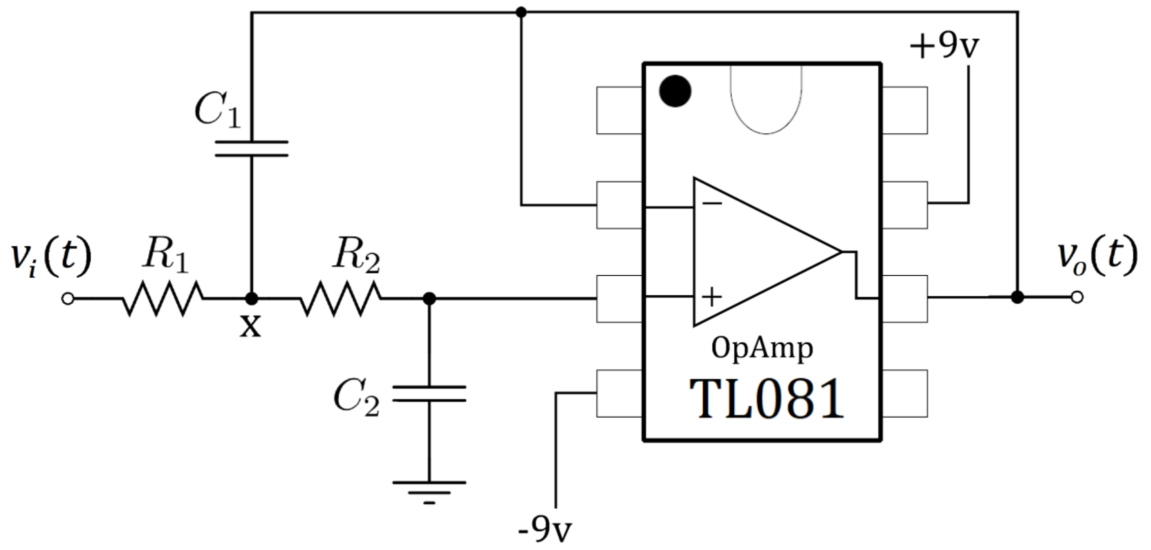


Figura 1: Filtro paso-bajas Topología Sallen-Key de segundo orden de ganancia unitaria.

Ejemplo (continuación)

En la figura 1, el amplificador operacional (OpAmp) TL081 es un circuito integrado analógico cuyas características principales se pueden aproximar utilizando el modelo de Amplificador operacional ideal, cuyas características de interés en nuestro caso son:

-Impedancia de entrada infinita, es decir que no fluye corriente eléctrica hacia el OpAmp ideal.

-Diferencia de potencial cero entre las terminales inversora (-) y no inversora (+) del OpAmp ideal, cuando la salida del OpAmp se retroalimenta a la terminal inversora del mismo.

Solución

En el dominio de Laplace mediante el concepto de impedancia, el circuito de la figura 1 se puede representar como se muestra en la figura 2:

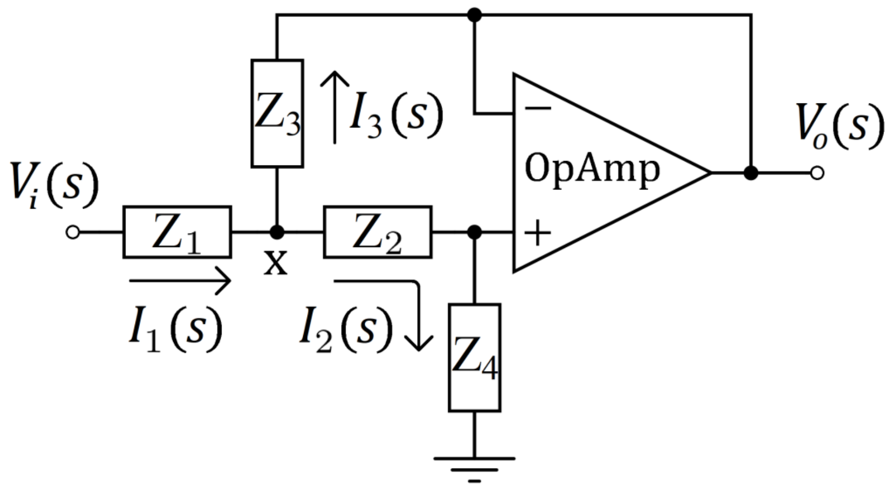


Figura 2.

Aplicando la LCK en el nodo x se tiene que

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Solución (continuación)

De la ley de Ohm y considerando que el OpAmp ideal tiene voltaje 0 entre sus terminales (−) y (+), la ec. anterior se puede reescribir como:

$$\frac{V_i - V_x}{Z_1} = \frac{V_x - V_o}{Z_2} + \frac{V_x - V_o}{Z_3}$$

O bien

$$\frac{V_i}{Z_1} = \frac{V_x}{Z_1} + \frac{V_x}{Z_2} - \frac{V_o}{Z_2} + \frac{V_x}{Z_3} - \frac{V_o}{Z_3}$$

Reagrupando los términos de la ecuación anterior, y factorizando V_x y V_o se tiene que:

$$\frac{V_i}{Z_1} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right) V_x - \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right) V_o \qquad (a)$$

Solución (continuación)

Por otro lado, como el OpAmp ideal tiene impedancia de entrada infinita, de la fig. 2 se tiene que I_2 también circula a través de Z_4, por lo que se tiene que

$$V_x = (Z_2 + Z_4)I_2 \qquad (b)$$

y

$$V_o = Z_4 I_2 \qquad (c)$$

Despejando I_2 de la ec. (c) y sustituyéndola en la ec. (b) se tiene que

$$V_x = (Z_2 + Z_4)\frac{V_o}{Z_4}$$

O bien

$$V_x = \left(\frac{Z_2}{Z_4} + 1\right)V_o \qquad (d)$$

Solución (continuación)

Sustituyendo V_x dado por la ecuación (d) en la ec. (a), se tiene que

$$\frac{V_i}{Z_1} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)\left(\frac{Z_2}{Z_4} + 1\right)V_o - \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)V_o$$

desarrollando el producto $\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)\left(\frac{Z_2}{Z_4} + 1\right)$ y factorizando V_o en el lado derecho de la ecuación anterior, se tiene que:

$$\frac{V_i}{Z_1} = \left(\frac{Z_2}{Z_1 Z_4} + \frac{Z_2}{Z_2 Z_4} + \frac{Z_2}{Z_3 Z_4} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} - \frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_3}\right)V_o$$

Simplificando

$$\frac{V_i}{Z_1} = \left(\frac{Z_2}{Z_1 Z_4} + \frac{1}{Z_4} + \frac{Z_2}{Z_3 Z_4} + \frac{1}{Z_1}\right)V_o$$

Solución (continuación)

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por Z_1 y simplificando términos se obtiene:

$$V_i = \left(\frac{Z_2}{Z_4} + \frac{Z_1}{Z_4} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3 Z_4} + 1 \right) V_o$$

Desarrollando la suma de términos en el lado derecho de la ecuación anterior se obtiene:

$$V_i = \frac{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4}{Z_3 Z_4} V_o$$

De la ec. anterior se tiene que

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + (Z_1 + Z_2) Z_3 + Z_3 Z_4} \qquad (e)$$

Solución (continuación)

Como $Z_1 = R_1,\ Z_2 = R_2,\ Z_3 = \frac{1}{sC_1},\ Z_4 = \frac{1}{sC_2}$, la ec. anterior resulta en:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s^2 C_1 C_2}}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{s^2 C_1 C_2}}$$

Multiplicando y dividiendo el lado derecho de la ec. anterior con $\frac{s^2}{R_1 R_2}$, finalmente se tiene que:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \qquad (4.4)$$

Respuesta en frecuencia

Cuando una señal $x(t)$ es absolutamente integrable, $X(s)$ se puede reducir a la transformada de Fourier de $x(t)$, esto es:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = X(s)\Big|_{s\,=\,j\omega}$$

Lo anterior implica que la T. de Fourier hereda de la T. de Laplace, entre otras, la propiedad de convolución. Considerando esto último, si $x(t)$ y $h(t)$ son señales absolutamente integrables, entonces

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Se reduce a

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Si $h(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema LTI estable, a $H(j\omega)$ se conoce como la respuesta en frecuencia del sistema.

En términos de magnitudes y fases, la ec. anterior se convierte en:

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)|$$

y

$$\sphericalangle Y(j\omega) = \sphericalangle H(j\omega) + \sphericalangle X(j\omega)$$

Las dos ec. anteriores implican que un sistema LTI estable $h(t)$, transforma una señal de entrada $x(t)$ en una señal de salida $y(t)$, al modificar las amplitudes y las fases de los componentes en frecuencia de $x(t)$ (definidos en la ec. F4.a cuando $x(t)$ es real):

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} |X(j\omega)| \cos(\omega t + \sphericalangle X(j\omega))\, d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} |H(j\omega)||X(j\omega)| \cos(\omega t + \sphericalangle X(j\omega) + \sphericalangle H(j\omega))\, d\omega$$

Ejemplo

Dado el siguiente sistema (filtro paso bajas Butterworth de 2do orden con frecuencia de corte $F_c = 1000$[Hz]):

$$H_c(s) = \frac{a^2}{s^2 + \sqrt{2}\, a\, s + a^2}, \qquad a = 2\pi 1000$$

Implementarlo de forma analógica mediante la topología de filtros Sallen-Key de ganancia unitaria.

Solución

Como se determinó en un ejemplo visto en el tema 4, la función de transferencia de un filtro paso-bajas Sallen-Key de ganancia unitaria está dada por la ecuación (4.4):

$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Solución (continuación)

Con el fin de determinar los valores de los capacitores y resistores para implementar el filtro $H_c(s)$ con la topología Sallen-Key, al requerir que $H_c(s) = H(s)$ se tiene que:

$$\sqrt{2}a = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} \quad y \quad \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} = a^2$$

De las dos ecuaciones anteriores se tiene que

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(R_1 + R_2)C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \qquad (1)$$

O bien

$$(R_1 + R_2)C_2 = \sqrt{2}\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

Solución (continuación)

De la ecuación anterior se tiene que

$$(R_1 + R_2)^2 C_2^2 = 2R_1 R_2 C_1 C_2$$

con $\boxed{R_1 = R_2 = R}$ de la ecuación anterior se tiene que

$$4R^2 C_2^2 = 2R^2 C_1 C_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = 2C_2}$$

Entonces, del lado derecho de la expresión (1) se tiene que:

$$a = \frac{1}{\sqrt{RR(2C_2)C_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}RC_2} = 2\pi 1000 \quad \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2\pi 1000\sqrt{2}C_2}}$$

Con $C_2 = 4.7nF$ se tiene que $C_1 = 2(4.7nF) = 9.4nF$

y que $R = 23944.58\,\Omega \quad R \approx 24\mathrm{k}\Omega$

Solución (continuación)

Finalmente, en la figura 3 se muestra el circuito que implementa un sistema (Filtro paso-bajas Butterworth de 2do orden con frecuencia de corte de $F_c = 1000$[Hz]) con función de transferencia

$$H_c(s) = \frac{a^2}{s^2 + \sqrt{2}\,a\,s + a^2}, \qquad a = 2\pi 1000$$

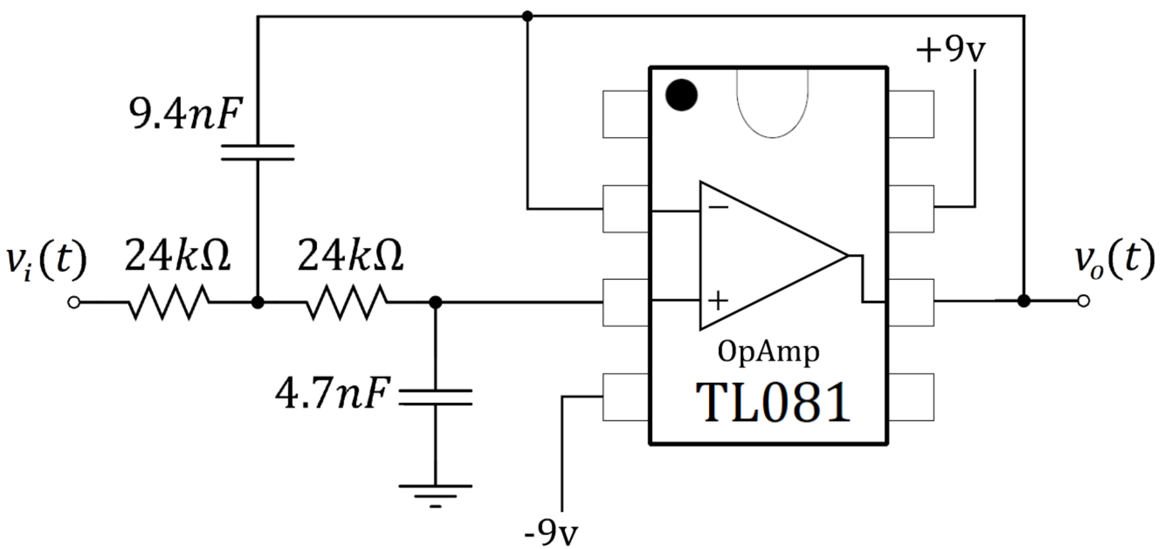
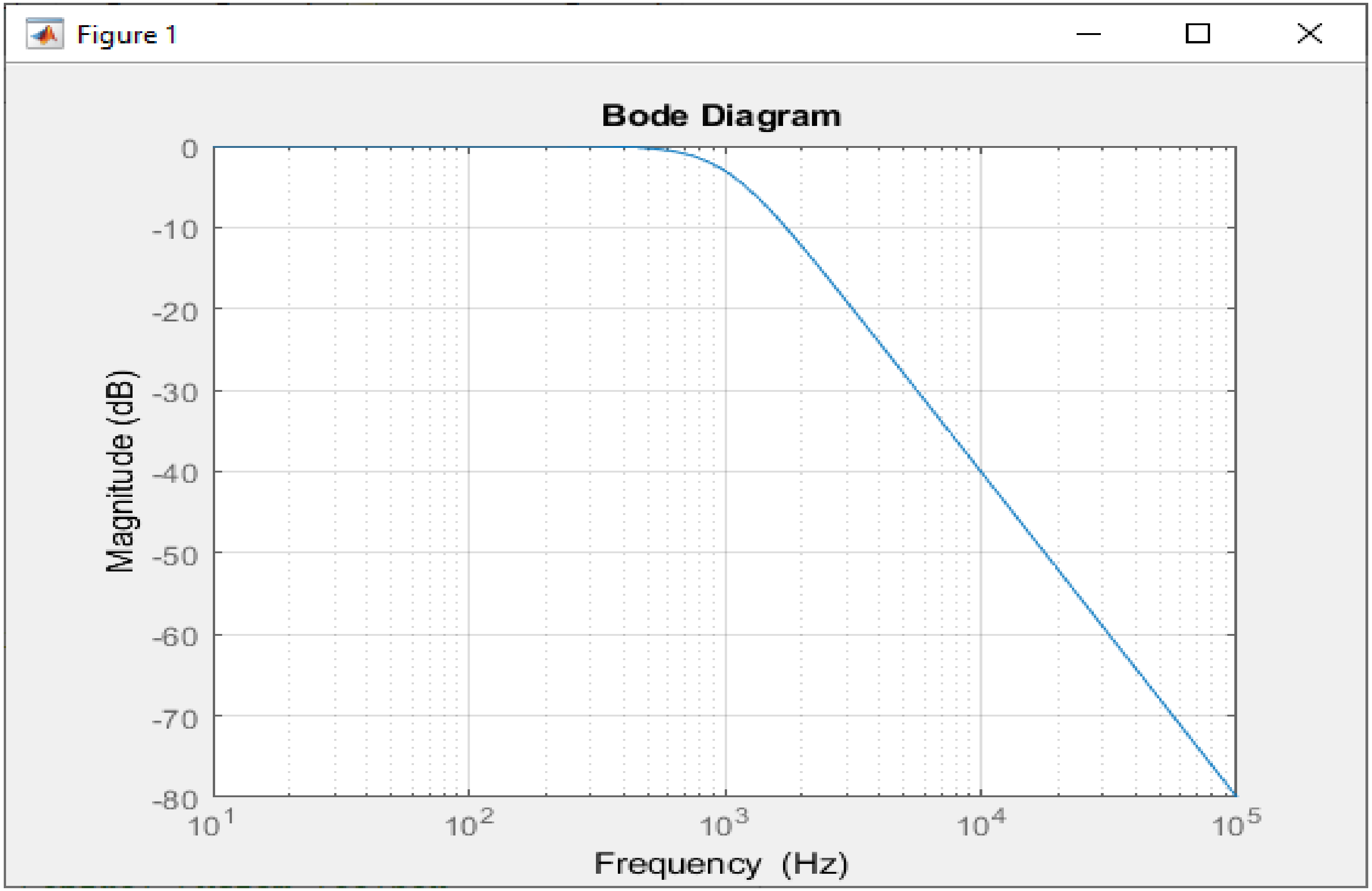


Figura 3.

Diagrama de Bode de $|H_c(j\omega)|$ en Hz con MATLAB




```
a = 2*pi*1000;
Hs = tf(a^2, [1 sqrt(2)*a a^2]);%Usa Control System Toolbox
HwdB = bodeplot(Hs);
setoptions( HwdB,'FreqUnits','Hz','PhaseVisible','off');
grid on
```