

Vademécum de Circuitos Eléctricos

Víctor Manuel Sánchez Esquivel

Prefacio

La asignatura de Análisis de Circuitos Eléctricos se cursa en el 5° semestre del plan de estudios de ingeniería eléctrica en general. Tiene una modalidad presencial de 4.0 horas a la semana durante 16 semanas. *La esencia de ella son la leyes de Kirchhoff, aplicadas al estudio y análisis de los circuitos eléctricos dinámicos de parámetros concentrados, lineales e invariantes en el tiempo.* El objetivo capital es proporcionar al estudiante conocimientos y principios fundamentales para resolver problemas de redes eléctricas en forma ingeniosa y sutil e interpretar los resultados, adquirir confianza en sí mismo y saber cuándo y cómo se aplica la teoría y de lo qué se puede hacer con ella.

Se debe enfatizar que para acceder a los temas que se estudian en esta asignatura el estudiante debe tener antecedentes académicos básicos y sólidos de física y matemáticas, tales como: linealidad, independencia lineal, matrices, números complejos, solución de ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace y transformada de Fourier.

La estructura de estos apuntes es la siguiente:

En el capítulo 1 se establecen las leyes de Kirchhoff y sus restricciones. Se presentan diversas técnicas —en particular el divisor de voltaje, el divisor de corriente y el circuito equivalente de Thévenin y Norton en su forma más sencilla para la transformación de fuentes de voltaje independientes y fuentes de corriente independientes en el análisis de los circuitos resistivos. A partir de ellas el estudiante podrá deducir y escribir la ecuación diferencial que describe el comportamiento de cualquier red eléctrica RLC. Con la popular transformada de Laplace se considera otra forma de caracterizar una red eléctrica y su relación con el modelo de ésta en el dominio del tiempo. Asimismo, se definen los conceptos de impedancia y admitancia.

El capítulo 2 inicia con una introducción a las relaciones entre los dominios del tiempo y la frecuencia al considerar la respuesta de estado permanente cuando la entrada es una señal sinusoidal. Se define el concepto de fasor y se le utiliza para determinar la respuesta de estado sinusoidal permanente al convertir las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

A continuación se especifica el concepto de potencia compleja y sus componentes potencia activa y potencia reactiva. Se lleva a cabo un estudio exhaustivo de la corrección del factor de potencia. Se lleva a cabo una introducción al estudio y comprensión de los circuitos trifásicos balanceados y desbalanceados. El capítulo finaliza con formas de medición de la potencia.

Los fundamentos para escribir las ecuaciones de nodo y de malla de manera sistemática, de una red eléctrica, son cubiertos en el capítulo 3. Estos métodos se aplican a una gran variedad de problemas simples pero prácticos. En este capítulo se presenta otro tipo de componentes eléctricos, que se emplean principalmente para modelizar redes eléctricas, a saber: inductores acoplados y fuentes dependientes o controladas por voltaje y por corriente. Además, se consideran métodos para escalar redes que satisfagan una respuesta en frecuencia deseada con valores prácticos o comerciales de sus componentes eléctricas. Finalmente, por medio del análisis por nodos se obtienen las ecuaciones de corriente y de voltaje de redes eléctricas con amplificadores operacionales mediante inspección.

El capítulo 4, está dedicado a teoremas de redes eléctricas. Se inicia con los más generales, como son los de *Sustitución* y de *Tellegen* hasta terminar con el teorema más restringido, que es el de

Reciprocidad. Entre ellos, se consideran el de *Linealidad*, el de la red equivalente de *Thévenin* y *Norton* y el de *Máxima Tránsito de Potencia*. Estos teoremas son muy generales y de gran utilidad en el estudio, análisis y síntesis de las redes eléctricas. Se aplican a una ingente cantidad de redes eléctricas que se encuentran en la práctica y conducen a soluciones simples, ingeniosas y elegantes. Su generalidad y simplicidad suelen ser engañosas, ya que frecuentemente, no se percibe el alcance de su aplicación o se mal interpreta su significado.

En el capítulo 5, se estudian las redes eléctricas de dos puertos o bipuertos lineales e invariantes en el tiempo. Dado que satisfacen ambas propiedades, su análisis se lleva a cabo mediante la transformada de Laplace. El planteamiento está orientado a considerar el bipuerto como *sistema*, *ecualizador* o *filtro*. En particular las redes de dos puertos se describen o caracterizan con las matrices: *de impedancias de circuito abierto*, *de admitancias de corto circuito*, *de parámetros híbridos* y *de transmisión*. Se deducen las relaciones que hay entre las diversas matrices o representaciones y como una aplicación de ellas se determinan algunas funciones de red, tales como: *impedancias de entrada y de salida*, *razón de voltaje (corriente) de salida y voltaje (corriente) de entrada*.

Es importante señalar que esta asignatura constituye la piedra de toque de muchos estudiantes, amén de que proporciona los antecedentes necesarios para otros cursos primordiales subsiguientes en el currículo de la ingeniería por lo que se debe impartir de tal forma que se incorpore al estudiante un percibir tangible y real de las redes eléctricas y a la vez se le estimule para transformarlo en un ser pensante y creativo al descubrir la *verdad* y la *belleza* inmanentes a la *física* y las *matemáticas*.

Víctor Manuel Sánchez Esquivel



Índice general

1. Sistemas eléctricos	7
1.1. Circuitos de parámetros concentrados	7
1.1.1. Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK)	8
1.1.2. Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK)	8
1.1.3. Fuente independiente de voltaje	8
1.1.4. Fuente independiente de corriente	9
1.1.5. Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton	9
1.1.6. Potencia y energía	11
1.2. Breve descripción de sistema	12
1.3. Representación de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo mediante ecuaciones diferenciales	14
1.4. Ecuaciones diferenciales y función de transferencia	18
1.5. Conceptos de impedancia y admitancia en el dominio de la variable compleja s	19
2. Análisis en el estado sinusoidal permanente	25
2.1. La función sinusoidal	25
2.1.1. Propiedades de las señales sinusoidales que las distinguen de otras señales	25
2.1.2. Representación de funciones sinusoidales por medio de <i>fasores</i>	26
2.2. Concepto de impedancia y admitancia complejas	28
2.3. Respuesta en frecuencia	30
2.3.1. Ancho de banda	31
2.4. Potencia y energía en estado sinusoidal permanente	35
2.4.1. Potencia instantánea y potencia promedio	35
2.4.2. Valor eficaz	37
2.4.3. Potencia en el circuito eléctrico de un puerto	37
2.4.4. Potencia compleja	38
2.4.5. Corrección del factor de potencia	41
2.4.6. Superposición y potencia	43
2.5. Circuitos trifásicos	45
2.5.1. Método de los dos wattmetros	50
3. Métodos generales de análisis de redes eléctricas	51
3.1. Introducción	51
3.2. Transformación de fuentes	51
3.2.1. Rama genérica arbitraria	52
3.2.2. Gráfica asociada de una red eléctrica y sus propiedades	53
3.3. Matriz de incidencia, matriz de mallas y las leyes de Kirchhoff	55

3.4.	Análisis por el método de nodos de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo	57
3.5.	Fuentes controladas o dependientes	60
3.6.	Análisis en estado sinusoidal permanente	61
3.6.1.	Propiedades de la matriz de admitancias de nodo	62
3.6.2.	Obtención de la ecuación de nodos por inspección	62
3.7.	Análisis por el método de mallas de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo	63
3.7.1.	Propiedades de la matriz de impedancias de malla	65
3.7.2.	Obtención de la ecuación de mallas por inspección	66
3.8.	Método abreviado	66
3.9.	El amplificador operacional	67
3.10.	Escalamiento de impedancia y de frecuencia	72
3.10.1.	Escalamiento de impedancia	73
3.10.2.	Escalamiento de frecuencia	75
3.10.3.	Desnormalización de una función de transferencia	77
3.11.	Filtros eléctricos de ganancia infinita y realimentación múltiple	78
3.12.	Filtros eléctricos con fuente de voltaje controlada por voltaje	80
4.	Teoremas de redes eléctricas	83
4.1.	Introducción	83
4.2.	Teorema de Sustitución	83
4.3.	Teorema de Tellegen	87
4.4.	Teorema de Superposición	89
4.5.	Teorema de Thévenin y Norton	92
4.6.	Teorema de Reciprocidad	97
4.7.	Teorema de Máxima Transferencia de Energía	101
5.	Bipuertos	105
5.1.	Parámetros z o de impedancia de circuito abierto	106
5.1.1.	Bipuertos en serie	108
5.2.	Parámetros y o de admitancia de corto circuito	110
5.2.1.	Bipuertos en paralelo	111
5.3.	Parámetros híbridos	114
5.3.1.	Parámetros g	114
5.3.2.	Parámetros h	116
5.4.	Parámetros de transmisión o parámetros ABCD	117
5.4.1.	Bipuertos en cascada	119
5.5.	Aplicaciones	120

Capítulo 1

Sistemas eléctricos

1.1. Circuitos de parámetros concentrados

Se denomina *red eléctrica de parámetros concentrados* a la interconexión de elementos eléctricos cuyas dimensiones físicas son despreciables comparadas con la longitud de onda de la frecuencia normal de operación.

Recuerde que la longitud de onda, λ , se determina con la siguiente expresión

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío en $\left[\frac{m}{s}\right]$ y f es la frecuencia en hertzios, $[Hz]$.

En un elemento eléctrico de parámetros concentrados, la corriente eléctrica que circula a través de él y el voltaje entre sus terminales se encuentran bien definidos.

En una red eléctrica de parámetros concentrados los elementos de dos terminales se denominan *ramas* y las terminales de los elementos *odos*.

Direcciones de referencia

Considere el elemento de parámetros concentrados de dos terminales que se muestra en la figura 1.1.

Por convención el *voltaje de la rama* $v(t)$ es positivo en el tiempo t [esto es, $v(t) > 0$], siempre que el potencial del nodo \textcircled{a} en el tiempo t sea mayor que el potencial del nodo \textcircled{b} en el tiempo t , medidos ambos potenciales con respecto a una referencia común. Si estos potenciales se representan por $v_a(t)$ y $v_b(t)$, respectivamente, entonces

$$v(t) = v_a(t) - v_b(t) \tag{1.1}$$

Por convención la *corriente eléctrica de rama* $i(t)$ es positiva en el tiempo t [esto es, $i(t) > 0$] siempre que un flujo neto de cargas eléctricas positivas entre en la rama por el nodo \textcircled{a} y el mismo flujo de cargas eléctricas salga por el nodo \textcircled{b} .

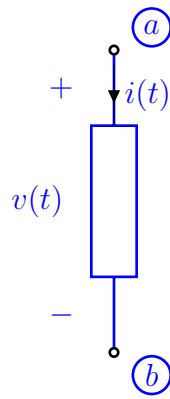


Figura 1.1: Elemento de parámetros concentrados de dos terminales con direcciones de referencia asociadas.

Aunque estas direcciones de referencia son arbitrarias; es conveniente trabajar con las llamadas *direcciones de referencia asociadas*. Se dice que la dirección de referencia del voltaje de rama y la dirección de referencia de la corriente eléctrica están asociadas si una corriente eléctrica positiva entra a la rama por la terminal con el signo positivo y la abandona por la terminal con el signo negativo.

1.1.1. Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK)

En un circuito de parámetros concentrados, en cualquiera de sus nodos, en todo tiempo, la suma algebraica de las corrientes eléctricas que entran y salen es cero.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

1.1.2. Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK)

En un circuito eléctrico de parámetros concentrados, en cualquiera de sus trayectorias cerradas, en todo tiempo, la suma algebraica de los voltajes de rama es cero.

$$\sum_{k=1}^m v_k = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

1.1.3. Fuente independiente de voltaje

Un elemento de dos terminales se denomina *fente independiente de voltaje* si mantiene un voltaje $v_s(t)$ en las terminales del circuito eléctrico arbitrario al cual está conectado; esto es, para cualquier corriente eléctrica $i(t)$ que fluya a través de la fuente, el voltaje en sus terminales es $v_s(t)$. A partir de su definición, una fuente independiente de voltaje tiene una característica en el tiempo t que consiste de una línea recta paralela al eje i en la ordenada $v_s(t)$ en el plano vi , como se muestra en la figura 1.2.

Es importante enfatizar que en el mundo físico no existe la fuente independiente de voltaje como tal y que una descripción más precisa al referirse a ella sería: fuente independiente de voltaje *ideal*.

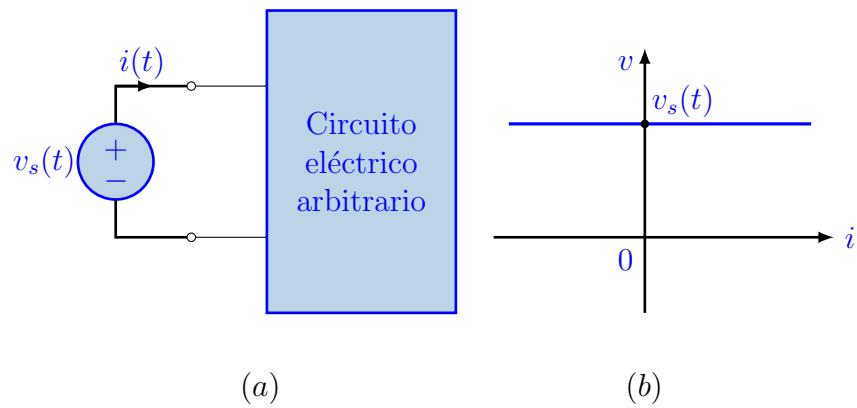


Figura 1.2: (a) Fuente independiente de voltaje conectada a un circuito arbitrario. (b) Característica en el tiempo t de la fuente independiente de voltaje.

1.1.4. Fuente independiente de corriente

Un elemento de dos terminales se denomina *fente independiente de corriente* si mantiene una corriente eléctrica $i_s(t)$ que fluya hacia las terminales del circuito eléctrico arbitrario al cual está conectado; esto es, para cualquier voltaje $v(t)$, en las terminales del circuito eléctrico, la corriente eléctrica que fluye hacia él es $i_s(t)$. En el tiempo t la característica de la fuente independiente de corriente es una línea vertical de abscisa $i_s(t)$, como se aprecia en a la figura 1.3.

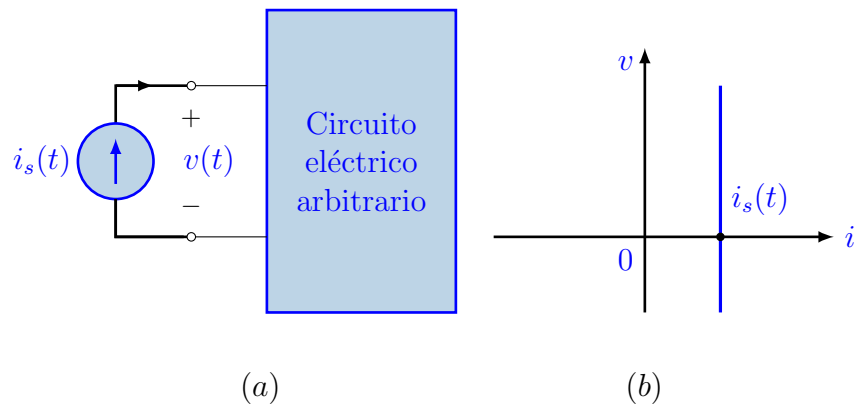


Figura 1.3: (a) Fuente independiente de corriente conectada a un circuito arbitrario. (b) Característica en el tiempo t de la fuente independiente de corriente.

Aquí también se debe señalar que en el mundo físico no existe la fuente independiente de corriente como tal y que una descripción más precisa al referirse a ella sería: fuente independiente de corriente *ideal*.

1.1.5. Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton

En el estudio, análisis y síntesis de las redes eléctricas, frecuentemente es más conveniente utilizar fuentes independientes de voltaje que fuentes independientes de corriente o viceversa, es decir, emplear fuentes independientes de corriente en vez de las de voltaje. Los circuitos equivalentes de *Thévenin* y *Norton* nos deparan esta flexibilidad.

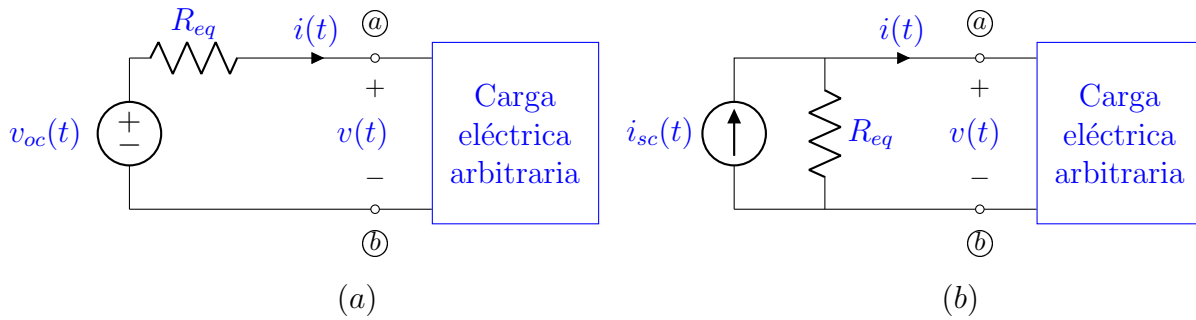


Figura 1.4: (a) Circuito equivalente de Thévenin. (b) Circuito equivalente de Norton.

Estas equivalencias eléctricas, sustentan que cualquier red eléctrica *lineal* de dos terminales constituida por fuentes independientes y resistores, sin importar que tan compleja sea, puede representarse ya sea por una fuente independiente de voltaje en serie con un resistor o una fuente independiente de corriente en paralelo con un resistor. La primera representación se denomina circuito equivalente de Thévenin y la segunda, circuito equivalente de Norton. Los circuitos equivalentes se muestran en la figura 1.4.

Para la consecución de estas representaciones, considere la red eléctrica lineal compuesta únicamente por fuentes independientes y resistores conectada a una carga eléctrica arbitraria como se observa en la figura 1.5.

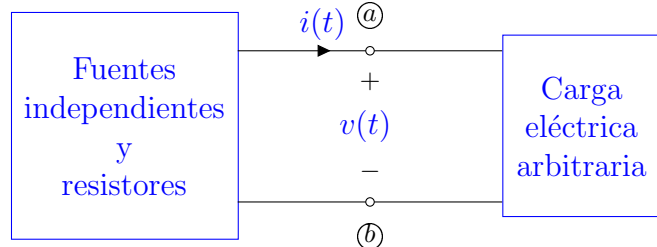


Figura 1.5: Red eléctrica lineal conectada a una carga arbitraria.

En ambos circuitos equivalentes, el resistor R_{eq} es el mismo. Su valor se obtiene de la red eléctrica original *cancelando todas las fuentes independientes*; esto es: se sustituyen *las fuentes independientes de voltaje por corto circuitos* y *las fuentes independientes de corriente por circuitos abiertos*. A continuación se determina o se mide la resistencia *vista* desde los nodos \textcircled{a} y \textcircled{b} como se ilustra en la figura 1.6a.

El valor de la fuente independiente de voltaje del circuito equivalente de Thévenin, es el del voltaje entre los nodos \textcircled{a} y \textcircled{b} cuando se desconecta la carga eléctrica arbitraria, es decir el voltaje de circuito abierto, o sea $v_{ab}(t) = v_{oc}(t)$. Esto se muestra en la figura 1.6b.

El valor de la fuente independiente de corriente del circuito equivalente de Norton, es el de la corriente eléctrica que fluye del nodo \textcircled{a} hacia el nodo \textcircled{b} cuando se pone en corto circuito la carga eléctrica arbitraria, $i_{sc}(t)$. La figura 1.6c ilustra esta idea.

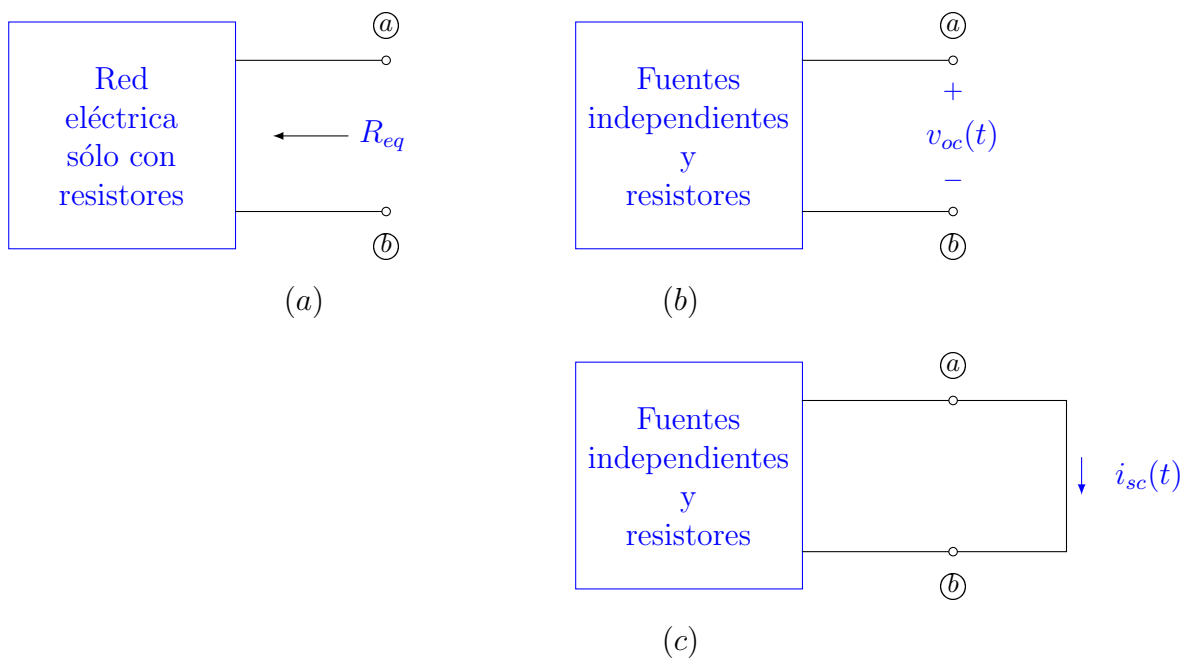


Figura 1.6: (a) Cálculo de la resistencia R_{eq} . (b) Obtención del voltaje de circuito abierto, $v_{oc}(t)$. (c) Obtención de la corriente de corto circuito, $i_{sc}(t)$.

Es importante advertir que para los procedimientos presentados, se cumple que

$$v_{oc}(t) = R_{eq}i_{sc}(t) \quad (1.4)$$

o también

$$i_{sc}(t) = G_{eq}v_{oc}(t) \quad (1.5)$$

donde

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} \quad (1.6)$$

1.1.6. Potencia y energía

Considere la red eléctrica lineal e invariante en el tiempo que se observa en la figura 1.7. La *potencia instantánea* que suministra el generador a la *red eléctrica de un puerto*,¹ en el tiempo t , es igual al producto del voltaje de puerto $v(t)$ y la corriente eléctrica de puerto $i(t)$, con las direcciones de referencia asociadas como se aprecia en la figura 1.7.

Así

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (1.7)$$

Cuando $i(t)$ está en amperes y $v(t)$ está en volts, $p(t)$ se mide en vatios (watts).

La energía es la integral de la potencia, por lo que la energía suministrada por el generador a la red eléctrica de un puerto desde el tiempo t_0 al tiempo t es

¹Una red eléctrica de un puerto es cualquier red eléctrica que no contiene fuentes independientes y de la cual sólo un par de terminales se emplean para aplicar una entrada y medir una respuesta.

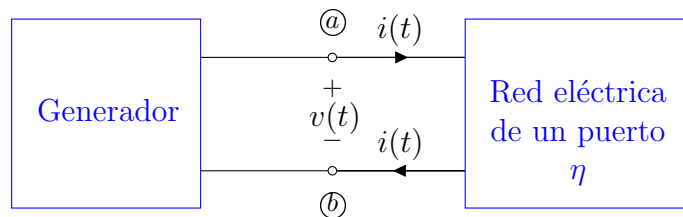


Figura 1.7: La potencia instantánea que se entrega a la red eléctrica de un puerto en el tiempo t es $p(t) = v(t)i(t)$.

$$W(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t v(\tau) i(\tau) d\tau \quad (1.8)$$

Considerando direcciones de referencia asociadas, es decir, que la corriente fluye de un punto de mayor potencial a otro de menor potencial, *un elemento de dos terminales es pasivo si y sólo si* $p(t) \geq 0$ para todo tiempo. Lo anterior significa que un elemento pasivo nunca proporciona energía al mundo exterior. Cuando un elemento no es pasivo, se dice que es activo.

Finalmente, ya que en este curso se estudian principalmente circuitos eléctricos de parámetros concentrados, lineales, invariantes en el tiempo y dinámicos; es conveniente recordar estos conceptos.

1.2. Breve descripción de sistema

Un sistema se puede considerar un transductor que opera sobre la señal de la entrada, $x(t)$, para producir la señal de la salida, $y(t)$, como se observa en la figura 1.8.

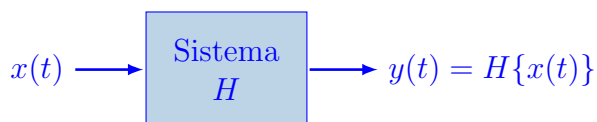


Figura 1.8: Sistema de una sola entrada y una sola salida.

Un *sistema* (circuito eléctrico) *dinámico* es aquel en el cual la respuesta en algún tiempo depende del valor presente de la entrada y de algunos valores anteriores de la entrada. Un sistema que contiene al menos un elemento que almacena energía y al menos un elemento que disipa energía es un sistema dinámico.

Un *sistema lineal* satisface el principio de superposición. Un sistema descrito por

$$y(t) = H\{x(t)\} \quad (1.9)$$

es lineal si y sólo si

$$H\{\alpha x_a(t) + \beta x_b(t)\} = \alpha H\{x_a(t)\} + \beta H\{x_b(t)\} \quad (1.10)$$

Donde α y β son dos números reales diferentes de cero.

Si $x_b(t) = 0$

$$H\{\alpha x_a(t)\} = \alpha H\{x_a(t)\} \quad \text{Homogeneidad} \quad (1.11)$$

Si $\alpha = \beta = 1$

$$H\{x_a(t) + x_b(t)\} = H\{x_a(t)\} + H\{x_b(t)\} \quad \text{Aditividad} \quad (1.12)$$

Un *sistema invariante en el tiempo* es aquel en el cual la forma de onda de la respuesta depende de *la forma de onda de la entrada* y no del instante en que se aplica la entrada. Un sistema descrito por la ecuación (1.9) es invariante si sólo si

$$y(t \pm \tau) = H\{x(t \pm \tau)\} \quad (1.13)$$

1.3. Representación de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo mediante ecuaciones diferenciales

Para llevar a cabo el estudio y análisis de un sistema en general (circuito eléctrico en particular) es necesario tener una representación del mismo; esto se logra mediante un modelo. Establecer el modelo de un sistema físico constituye la etapa más crítica en el análisis y diseño de los sistemas ya que debe relacionar de manera cuantitativa las diversas variables del mismo. Un modelo se puede definir como “*una representación de los aspectos esenciales de un sistema, que implican un conocimiento de su comportamiento y que se puede emplear de forma útil*”. Para que un modelo tenga alguna utilidad, no debe ser inextricable de forma tal que no se pueda entender y por consiguiente inadecuado para su estudio y análisis; o ser tan simple y trivial hasta el punto en que las predicciones sobre su funcionamiento sean burdas e incongruentes.

Existen dos tipos de circuitos eléctricos, *circuitos de parámetros concentrados* y *circuitos de parámetros distribuidos*. Baste decir aquí, que en un elemento eléctrico concentrado de dos terminales, el voltaje y la corriente eléctrica asociados a él, son cantidades bien definidas en todo instante de tiempo.

Cuando se analizan circuitos eléctricos resistivos, un modelo se puede obtener a partir de un conjunto de ecuaciones de nodo o de ecuaciones de malla, las cuales son ecuaciones algebraicas. Sin embargo, para circuitos eléctricos con elementos que almacenan energía, tales como inductores y capacitores, las ecuaciones que los modelizan ya no son más algebraicas.

Los circuitos eléctricos que serán analizados y en general todos los sistemas están compuestos por elementos interconectados. Para cada elemento existen leyes físicas que pueden representarse por relaciones matemáticas entre las variables asociadas a tal elemento. Dichas leyes se denominan *leyes de elemento*. Además de éstas existen otras, llamadas *leyes de conjunto* que relacionan las variables de los diversos elementos que constituyen el circuito eléctrico.

Los circuitos eléctricos que se estudian en esta asignatura se pueden modelizar por medio de una ecuación diferencial lineal ordinaria de la forma

$$\sum_{n=0}^N a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M b_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (1.14)$$

Esta ecuación diferencial describe un sistema lineal de orden N , donde N representa la máxima derivada de la *única* salida del circuito y M , es la máxima derivada de la *única* entrada del circuito eléctrico.

Por otro lado, si los coeficientes de la ecuación (1.14) no dependen del tiempo, es decir son constantes, entonces la ecuación

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (1.15)$$

describe un circuito eléctrico lineal e *invariante en el tiempo*, *fijo* o *estacionario*.

La solución de la ecuación diferencial (1.14) o (1.15) consta de dos partes. La primera cuando la entrada es nula, es llamada *respuesta natural*, *respuesta libre* o *respuesta homogénea*. Se acostumbra denominarla *respuesta de entrada cero*, y se debe a la energía almacenada en el sistema. La otra parte de la solución corresponde a la ecuación no homogénea y es la *respuesta particular* o *respuesta forzada*. Se le conoce como *respuesta de estado cero* (o *respuesta de estado de energía inicial nula*), lo que indica que la energía inicial es cero y se debe por entero a la entrada. Matemáticamente, lo anterior se expresa de la siguiente manera

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (1.16)$$

La respuesta de estado cero de un sistema *lineal* y *causal* descrito por la ecuación (1.14), está dada por la siguiente expresión

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t, \tau)d\tau \quad (1.17)$$

Y la respuesta completa de un sistema lineal e invariante en el tiempo caracterizado por la ecuación (1.15) ² es de la forma

$$y(t) = \sum_{n=1}^N C_n e^{s_n t} + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (1.18)$$

donde las s_n son las raíces de la ecuación característica y se conocen como *eigenvalores* o simplemente *valores característicos*, esto es

$$\sum_{n=0}^N a_n s^n = 0 \quad (1.19)$$

La integral de la ecuación (1.18), correspondiente a la respuesta de estado cero, recibe diversos nombres, entre otros *integral de convolución*, *integral de Helmholtz* o *integral de superposición*. El término convolución aparece más frecuentemente, pero el término de *superposición* es más descriptivo, no sólo por la naturaleza de la integral en sí misma, sino porque nos recuerda que sólo se aplica para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Las definiciones de respuesta transitoria y respuesta de estado permanente, se pueden proporcionar de manera concisa. La respuesta transitoria es la parte de la respuesta completa que se hace cero cuanto t tiende a infinito. La respuesta de estado permanente es la parte de la respuesta completa que no se hace cero cuanto t tiende a infinito.

Ejemplo 1.1 Encuentre el voltaje del capacitor $v_C(t)$, para $-\infty < t < \infty$, del circuito eléctrico RLC que se observa en la figura 1.9.

²Si los valores característicos son diferentes.

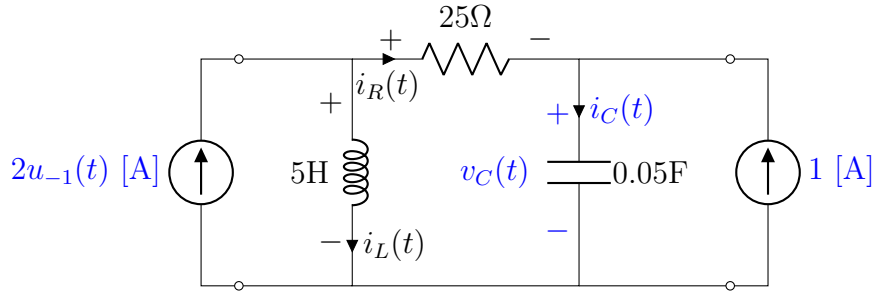


Figura 1.9: Circuito eléctrico RLC de segundo orden.

Como el circuito eléctrico es lineal, dado que los elementos que lo constituyen son lineales, se puede aplicar el principio de superposición. Los valores de voltajes y corrientes eléctricas, se obtienen teniendo presente que antes de que la fuente independiente de corriente de la izquierda se active en $t = 0$, el circuito eléctrico se encuentra ya en estado permanente. La corriente eléctrica de la fuente independiente de corriente de la derecha fluye completamente (de derecha a izquierda) a través del resistor y del inductor. Entonces

$$\begin{aligned} v_R(t) &= -25 \text{ [V]} & i_R(t) &= -1 \text{ [A]} \\ v_L(t) &= 0 \text{ [V]} & i_L(t) &= 1 \text{ [A]} \\ v_C(t) &= 25 \text{ [V]} & i_C(t) &= 0 \text{ [A]} \end{aligned}$$

Para determinar el efecto de la otra fuente independiente de corriente, se obtiene la ecuación diferencial que describe o modeliza el circuito eléctrico (*Se pone en circuito abierto la fuente independiente de corriente de 1 [A]*). Las ecuaciones de conjunto, se obtienen a partir de las leyes de Kirchhoff.

De la LCK se tiene

$$\begin{aligned} i_s(t) &= i_L(t) + i_R(t) \\ &= i_L(t) + i_C(t) \end{aligned} \tag{1.20}$$

y de la LVK

$$\begin{aligned} v_L(t) &= v_R(t) + v_C(t) \\ &= Ri_R(t) + v_C(t) \\ &= Ri_C(t) + v_C(t) \\ &= RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \\ L \frac{di_L(t)}{dt} &= RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \end{aligned} \tag{1.21}$$

considerando la ecuación (1.20) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} L \frac{d}{dt} [i_s(t) - i_C(t)] &= L \frac{di_s(t)}{dt} - LC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} \\ &= RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \end{aligned} \tag{1.22}$$

agrupando términos

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{1}{C} \frac{di_s(t)}{dt} \quad (1.23)$$

sustituyendo los valores de los elementos

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 5 \frac{dv_C(t)}{dt} + 4v_C(t) = 20 \frac{di_s(t)}{dt} \quad (1.24)$$

la ecuación característica es

$$s^2 + 5s + 4 = 0 \quad (1.25)$$

y los valores característicos son

$$\begin{aligned} s_1 &= -1 \\ s_2 &= -4 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Por tanto, la respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{20}{3} \left[-e^{-t} + 4e^{-4t} \right] u_{-1}(t) \quad (1.27)$$

Y el voltaje del capacitor de estado inicial cero, debido a la fuente independiente de corriente con $i_s(t) = 2u_{-1}(t)$, es

$$\begin{aligned} v_{C_{zs}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\xi)x(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)x(t-\xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{20}{3} \left[-e^{-\xi} + 4e^{-4\xi} \right] u_{-1}(\xi) 2u_{-1}(t-\xi) d\xi \\ &= \frac{40}{3} \int_0^t \left[-e^{-\xi} + 4e^{-4\xi} \right] d\xi \\ &= \frac{40}{3} \left[e^{-t} - e^{-4t} \right] \end{aligned} \quad (1.28)$$

Así, la respuesta considerando ambas fuentes independientes de corriente, es por consiguiente

$$v_{C_{zs}}(t) = 25 + \frac{40}{3} \left[e^{-t} - e^{-4t} \right] u_{-1}(t) \quad [\text{V}] \quad (1.29)$$

Se debe notar que la función escalón unitario se utiliza únicamente para enfatizar que la función a la que está multiplicando sólo tiene validez para $t \geq 0$.

1.4. Ecuaciones diferenciales y función de transferencia

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo con una sola entrada $x(t)$ y una sola salida $y(t)$. Si se puede describir o modelizar por una ecuación diferencial, entonces los coeficientes son constantes, y para un sistema de orden N la descripción está dada por la ecuación (1.30)

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (1.30)$$

aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial se obtiene

$$\sum_{n=0}^N a_n s^n Y(s) - \sum_{n=1}^N a_n \left\{ \sum_{k=1}^n y^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\} = \sum_{n=0}^M b_n s^n X(s) - \sum_{n=1}^M b_n \left\{ \sum_{k=1}^n x^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\}$$

donde $y^{k-1}(0^-)[x^{k-1}(0^-)]$ es la $(k-1)$ -ésima derivada de $y(t)[x(t)]$ evaluada en $t = 0^-$.

Despejando a $Y(s)$, resulta

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{n=1}^N a_n \left\{ \sum_{k=1}^n y^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\}}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} \right] + \left[\frac{\sum_{n=0}^M b_n s^n}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} X(s) + \frac{\sum_{n=1}^M b_n \left\{ \sum_{k=1}^n x^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\}}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} \right] \quad (1.31)$$

o

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

La transformada inversa de Laplace del primer término de la derecha de la ecuación (1.31) es la respuesta de entrada cero, mientras que la transformada inversa de Laplace del segundo término de la derecha es la respuesta de estado cero.

La función de transferencia se define como la razón de la transformada de Laplace de la salida a la transformada de Laplace de la entrada cuando todas las condiciones son nulas. Luego

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n s^n}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} \quad x^{k-1}(0^-) = y^{k-1}(0^-) = 0 \quad (1.32)$$

1.5. Conceptos de impedancia y admitancia en el dominio de la variable compleja s

En el dominio del tiempo las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff son

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{en todo nodo}$$
$$\sum_{k=1}^m v_k(t) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{en toda malla}$$

Si $I(s)$ es la transformada de Laplace de $i(t)$ y $V(s)$ es la transformada de Laplace de $v(t)$, las leyes de Kirchhoff bajo la transformada de Laplace también satisfacen

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\sum_{k=1}^m V_k(s) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

En el dominio del tiempo, las variables de corriente eléctrica y de voltaje, en un resistor lineal e invariante en el tiempo, están relacionadas por

$$v(t) = R i(t) \tag{1.33}$$

De su transformada de Laplace, la ecuación anterior resulta

$$V(s) = R I(s) \tag{1.34}$$

Se concluye, entonces, que en el dominio de la frecuencia la transformada de Laplace del voltaje en un resistor es igual a la resistencia por la transformada de Laplace de la corriente eléctrica que fluye a través de él. El factor R recibe el nombre de *impedancia* del resistor, sus unidades son *ohms*, Ω . Asimismo, su recíproco (conductancia) $1/R = G$ se denomina *admitancia* del resistor, se mide en *siemens*, S .

En el dominio del tiempo, las variables de corriente eléctrica y de voltaje en el capacitor lineal e invariante en el tiempo, están relacionadas por

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \tag{1.35}$$

o

$$v(t) = v(0^-) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \tag{1.36}$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación (1.35)

$$I(s) = C [sV(s) - v(0^-)] \quad (1.37)$$

ecuación que se puede escribir como

$$V(s) = \frac{v(0^-)}{s} + \frac{1}{sC}I(s) \quad (1.38)$$

Las ecuaciones (1.37) y (1.38) son asertos equivalentes. En particular, si el valor inicial del voltaje en el capacitor es cero. La ecuación(1.38) se reduce a

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) \quad (1.39)$$

De esta manera, en el dominio de la frecuencia, el voltaje del capacitor con un *un voltaje inicial cero* se encuentra multiplicando la corriente eléctrica a través de él por $1/sC$. Este factor, $1/sC$, se denomina la *impedancia* del capacitor y su recíproco, sC se conoce como la *admitancia* del capacitor.

En el dominio del tiempo, las variables de corriente eléctrica y de voltaje en un inductor lineal e invariante en el tiempo, se relacionan por

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.40)$$

o

$$i(t) = i(0^-) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (1.41)$$

De la transformada de Laplace de la ecuación (1.40), se obtiene

$$V(s) = L [sI(s) - i(0^-)] \quad (1.42)$$

o

$$I(s) = \frac{i(0^-)}{s} + \frac{V(s)}{sL} \quad (1.43)$$

En particular, si el valor inicial de la corriente en el inductor es cero, la ecuación (1.42), se convierte en

$$V(s) = sLI(s) \quad (1.44)$$

En el dominio de la frecuencia, por consiguiente, el voltaje en un inductor con *corriente inicial cero* se determina multiplicando la corriente eléctrica que fluye en él por el factor sL . Este término, sL , es nombrado la *impedancia* del inductor y $1/sL$, la *admitancia* del inductor.

Dominio del tiempo

Dominio de la frecuencia

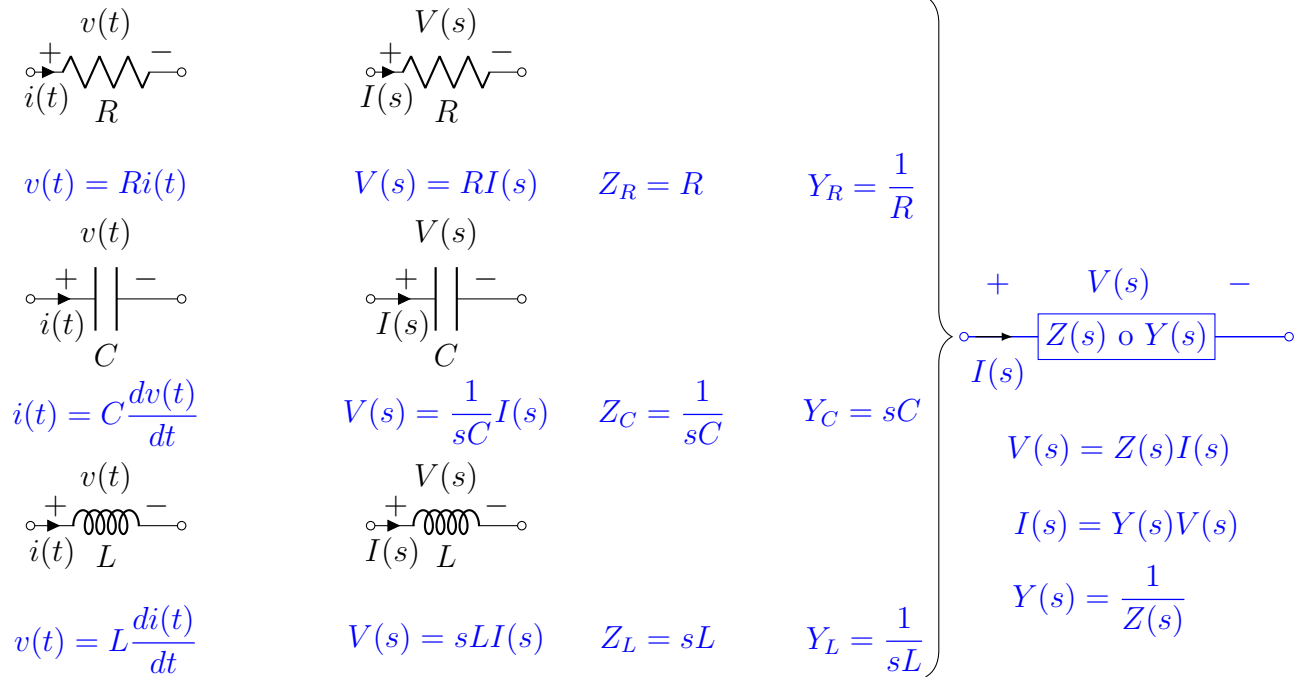


Figura 1.10: Tabla de impedancias y admitancias.

En la figura 1.10, se presenta un compendio de las relaciones en los dominios del tiempo y de la frecuencia, hasta ahora vistos.

La impedancia se representa por el símbolo $Z(s)$ y la admitancia por el símbolo $Y(s)$. Debe ser claro que tales relaciones son recíprocas, es decir

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} \quad Z(s)Y(s) = 1 \quad (1.45)$$

Se infiere que sólo se requiere una ecuación algebraica, esto es, $V(s) = Z(s)I(s)$ o $I(s) = Y(s)V(s)$ para describir las relaciones voltaje-corriente de un resistor, de un capacitor o de un inductor. Por esta razón, es que el concepto de impedancia (o admitancia) es muy ventajoso. Las relaciones en el dominio de la frecuencia son algebraicas y ya no se presentan más derivadas o integrales.

A continuación se generalizan los conceptos de impedancia y admitancia. Considere la situación que se muestra en la figura 1.11, en donde

$$\text{Impedancia} \quad Z(s) \triangleq \frac{V(s)}{I(s)} \quad (1.46)$$

$$\text{Admitancia} \quad Y(s) \triangleq \frac{I(s)}{V(s)} \quad (1.47)$$

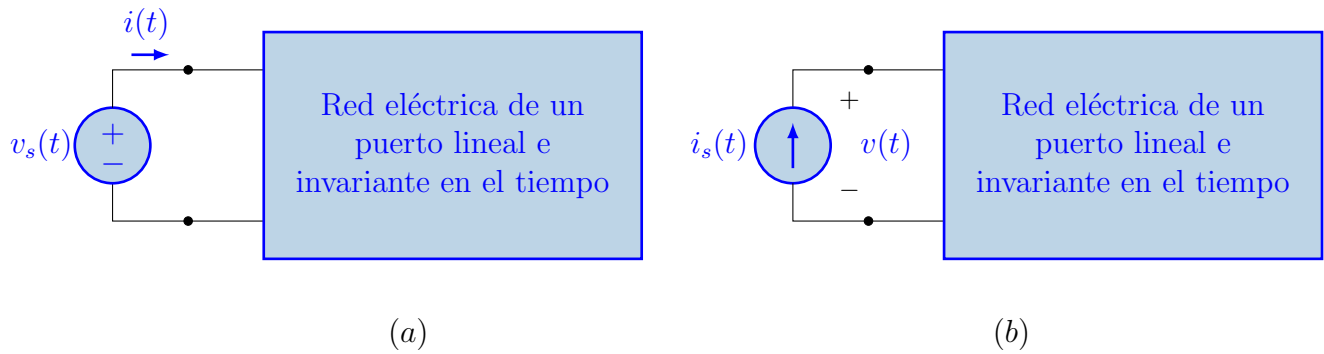


Figura 1.11: Conceptos de Impedancia y Admitancia.

Finalmente, se debe mencionar que las unidades de la impedancia son ohms, Ω , y las unidades de la admitancia son siemens, S.

Ejemplo 1.2 Encuentre la función de transferencia del circuito eléctrico RLC presente en la figura 1.12.

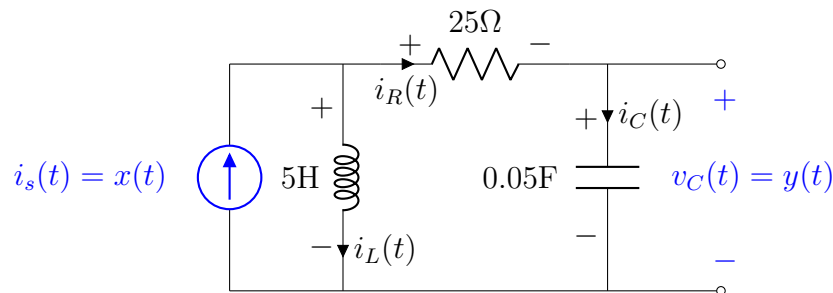


Figura 1.12: Circuito eléctrico RLC de segundo orden.

El circuito eléctrico de la figura 1.12, se puede dibujar como se ilustra en la figura 1.13, sustituyendo los elementos eléctricos involucrados por sus impedancias correspondientes.

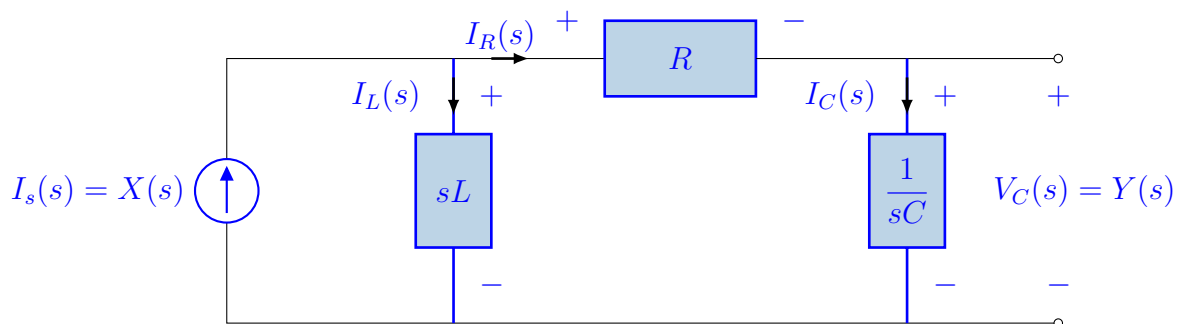


Figura 1.13: Circuito eléctrico RLC de segundo orden.

El voltaje en el capacitor está dado por

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) \quad (1.48)$$

donde la corriente eléctrica en el capacitor se puede obtener del divisor de corriente y está dada por

$$I_C(s) = \frac{sL}{sL + \left[R + \frac{1}{sC} \right]} I_s(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} I_s(s) \quad (1.49)$$

Sustituyendo la ecuación (1.49) en la ecuación (1.48) y con un poco de álgebra, se obtiene

$$\frac{V_C(s)}{I_s(s)} = H(s) = \frac{1}{sC} \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} \quad (1.50)$$

Sustituyendo los valores, la función de transferencia es

$$\frac{V_c(s)}{I_s(s)} = H(s) = \frac{20s}{s^2 + 5s + 4}$$

¿Es posible obtener la ecuación diferencial que modeliza a este circuito eléctrico de una manera inmediata?

La respuesta es sí, para ello considere las ecuaciones (1.30) y (1.32).

Capítulo 2

Análisis en el estado sinusoidal permanente

2.1. La función sinusoidal

Se define una función sinusoidal de velocidad angular ω a cualquier función definida en el intervalo $-\infty < t < \infty$ de la forma $A_m \cos(\omega t + \phi)$, donde A_m es la amplitud, ω es la frecuencia angular (medida en radianes por segundo) y ϕ es la fase. Esta señal sinusoidal se muestra en la figura 2.1.

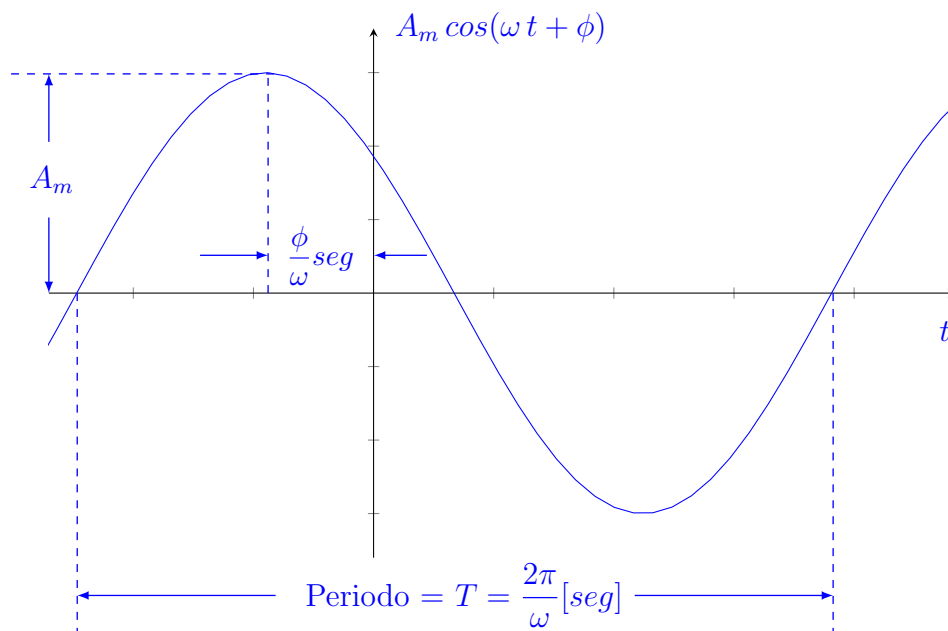


Figura 2.1: Forma de onda sinusoidal de amplitud A_m , frecuencia angular ω y fase ϕ .

2.1.1. Propiedades de las señales sinusoidales que las distinguen de otras señales

1. Si se deriva o se integra, vuelve a obtenerse la misma forma de onda.
2. La respuesta permanente ocasionada por entradas sinusoidales en sistemas lineales e invariantes en el tiempo y *estables* es también sinusoidal.

3. *Facilidad* de generar dichas señales.

4. Mediante el análisis de Fourier cualquier señal puede “*descomponerse*” en funciones sinusoidales.

Teorema

La suma algebraica de cualquier número de funciones sinusoidales de la misma frecuencia angular, ω y cualquier número de sus derivadas de cualquier orden es también una función sinusoidal de la misma frecuencia angular, ω .

2.1.2. Representación de funciones sinusoidales por medio de fasores

Una señal de la frecuencia angular ω está completamente definida por su amplitud A_m y su fase ϕ .

Si

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{A} e^{j\omega t} \right\} \quad (2.1)$$

donde

$$\mathbf{A} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi} \triangleq \text{Fasor} \quad (2.2)$$

Plano complejo

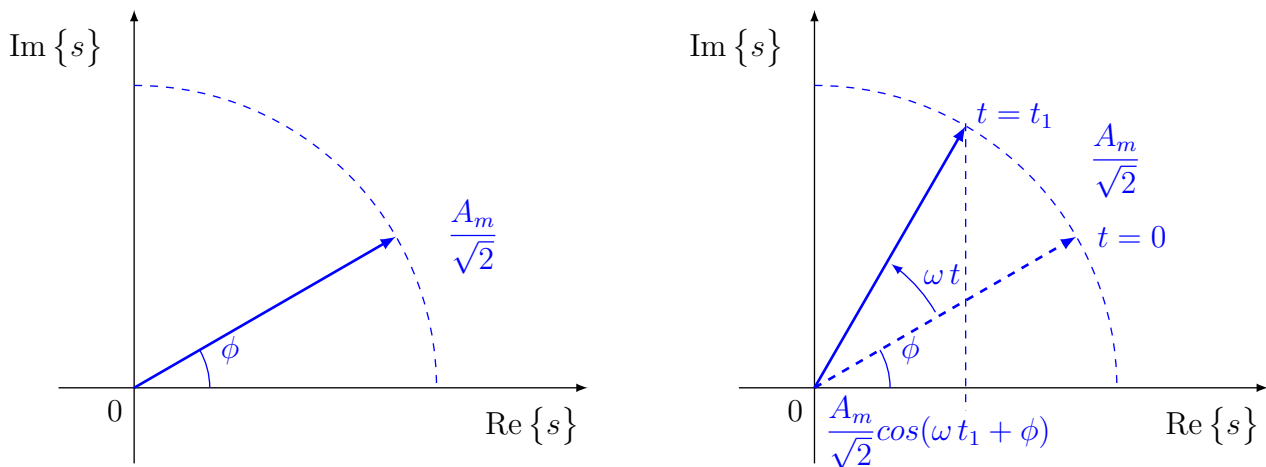


Figura 2.2: Concepto de fasor.

Un *fasor* es un segmento de recta dirigido, que gira alrededor del origen a una velocidad constante y cuya proyección sobre una dirección de referencia representa un señal sinusoidal. En la figura 2.2 se muestra este concepto. Se debe hacer hincapié en que un fasor no proporciona información sobre la frecuencia angular ω .

La representación de funciones sinusoidales por medio de fasores, se utiliza principalmente para obtener la respuesta de estado cero de una ecuación diferencial lineal ordinaria de coeficientes constantes, cuando la función de excitación es una función sinusoidal, de la forma

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) \quad (2.3)$$

La generalización de lo expresado en el párrafo anterior nos permite afirmar que *la respuesta permanente de un sistema (circuito eléctrico) dinámico lineal e invariante en el tiempo, cuando la entrada es sinusoidal, es también sinusoidal*. En la figura 2.3 se expone el quid de lo que se asevera.

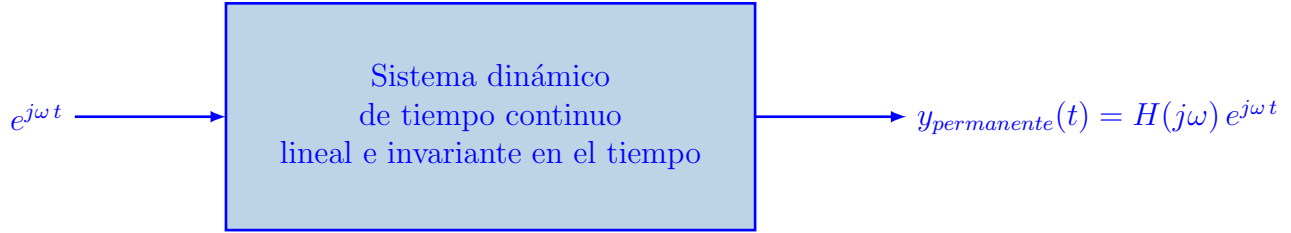


Figura 2.3: Diagrama de bloques de la respuesta en frecuencia de un sistema.

Donde

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)| \angle H(j\omega) \quad (2.4)$$

esto es, la función de transferencia evaluada en el eje imaginario del plano complejo.

Propiedades del operador $\text{Re}\{\cdot\}$

1. Es lineal. Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones complejas de variable real t y α y β dos números reales cualesquiera.

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\alpha f_1(t)\} &= \alpha \text{Re}\{f_1(t)\} && \text{Homogeneidad} \\ \text{Re}\{f_1(t) + f_2(t)\} &= \text{Re}\{f_1(t)\} + \text{Re}\{f_2(t)\} && \text{Aditividad} \\ \text{Re}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} &= \alpha \text{Re}\{f_1(t)\} + \beta \text{Re}\{f_2(t)\} && \text{Superposición} \end{aligned}$$

2. Sea \mathbf{A} un número complejo cuya representación polar es $\frac{A_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Re}\left\{\sqrt{2}\mathbf{A} e^{j\omega t}\right\} &= \text{Re}\left\{\frac{d}{dt}\sqrt{2}\mathbf{A} e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{j\omega\sqrt{2}\mathbf{A} e^{j\omega t}\right\} \\ \implies \frac{d}{dt} \text{Re}\{(\cdot)\} &= \text{Re}\left\{\frac{d}{dt}(\cdot)\right\} \\ \frac{d}{dt}\sqrt{2}\mathbf{A} e^{j\omega t} &= j\omega\sqrt{2}\mathbf{A} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

3. Sean $\mathbf{A} = A_r + jA_i$ y $\mathbf{B} = B_r + jB_i$, por lo tanto

$$\text{si } \mathbf{A} = \mathbf{B} \implies \sqrt{2}\mathbf{A} e^{j\omega t} = \sqrt{2}\mathbf{B} e^{j\omega t} \quad \forall t \implies \text{Re}\left\{\sqrt{2}\mathbf{A} e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{\sqrt{2}\mathbf{B} e^{j\omega t}\right\} \quad \forall t$$

por consiguiente

a)

$$\operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{A} e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{B} e^{j\omega t} \right\} \quad \forall t \implies \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

b)

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \implies \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{A} e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{B} e^{j\omega t} \right\} \quad \forall t$$

Finalmente, es conveniente recordar que para que un sistema dinámico (circuito eléctrico) tenga respuesta en estado sinusoidal permanente es necesario que todas sus frecuencias naturales estén en el semiplano izquierdo del plano complejo o si son imaginarias, que éstas sean diferentes a las de la función de excitación.

2.2. Concepto de impedancia y admitancia complejas

Considere la situación que se muestra en la figura 2.4. Cuando el componente eléctrico es:

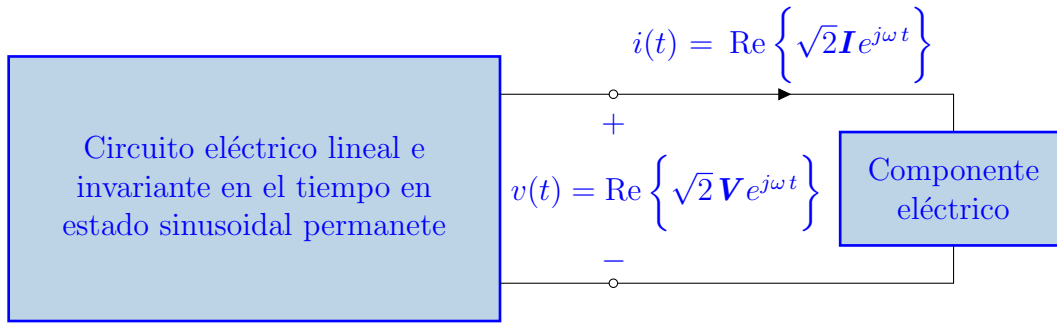


Figura 2.4: Circuito eléctrico lineal e invariante en el tiempo.

- Resistor:

$$\begin{aligned} v(t) = Ri(t) &\implies \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{V} e^{j\omega t} \right\} = R \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{I} e^{j\omega t} \right\} \\ \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{V} e^{j\omega t} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} R \mathbf{I} e^{j\omega t} \right\} \\ \implies \mathbf{V} = R \mathbf{I} \quad \text{o} \quad \mathbf{I} = G \mathbf{V} \end{aligned} \quad (2.5)$$

- Capacitor:

$$\begin{aligned} i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} &\implies \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{I} e^{j\omega t} \right\} = C \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{V} e^{j\omega t} \right\} \\ \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{I} e^{j\omega t} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} j\omega C \mathbf{V} e^{j\omega t} \right\} \\ \implies \mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \quad \text{o} \quad \mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.6)$$

- Inductor:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \implies \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{V} e^{j\omega t} \right\} = L \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{I} e^{j\omega t} \right\}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{V} e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} j\omega L \mathbf{I} e^{j\omega t} \right\} \quad (2.7)$$

$$\implies \mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} \quad \text{o} \quad \mathbf{I} = \frac{1}{j\omega L} \mathbf{V}$$

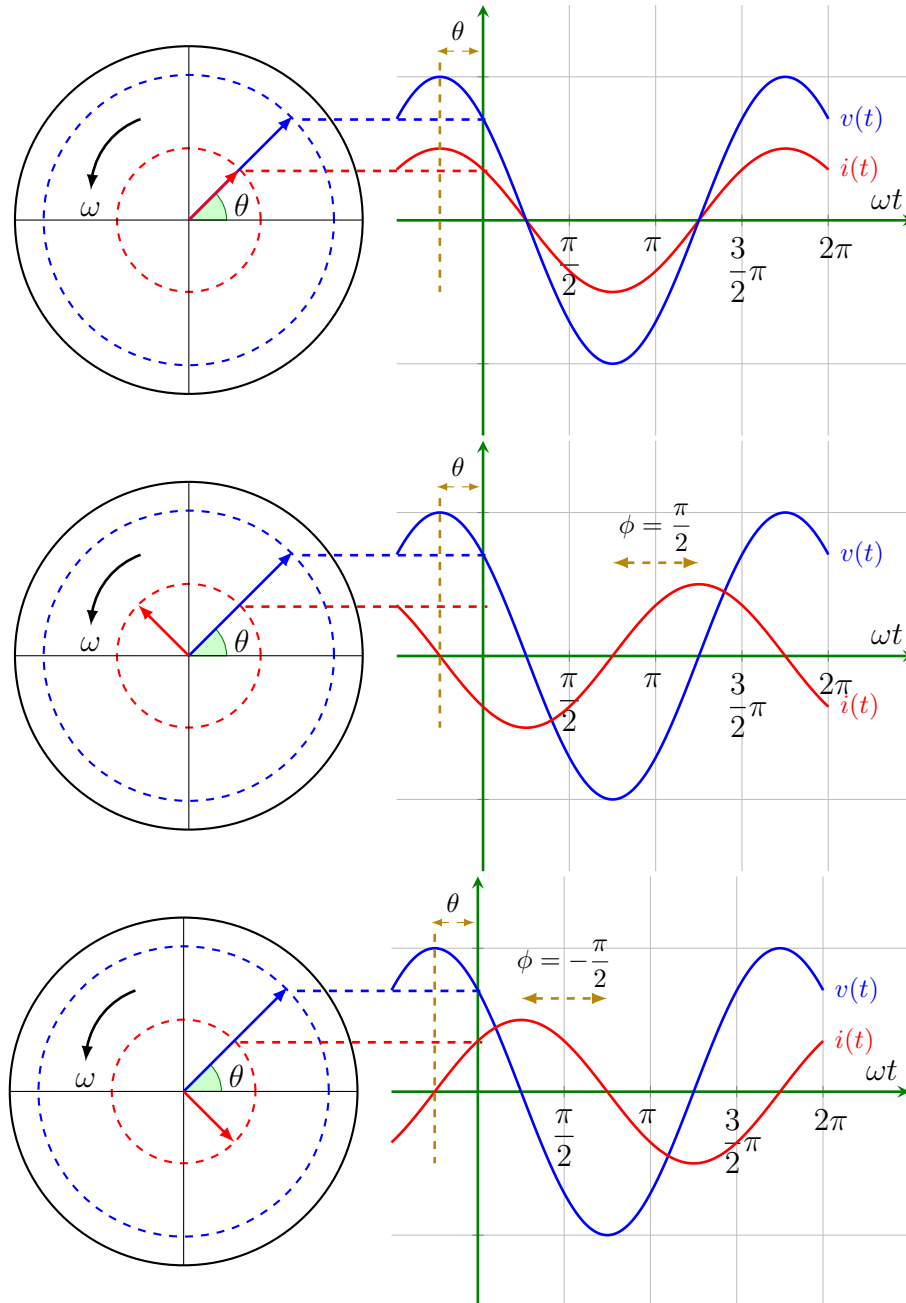


Figura 2.5: Relación entre el voltaje y la corriente eléctrica en un resistor, un capacitor y un inductor.

En la figura 2.5 se muestran las relaciones entre el voltaje y la corriente eléctrica en los elementos considerados, respectivamente.

Generalizando, la impedancia y admitancia se definen como:

$$Z(j\omega) \triangleq \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad Y(j\omega) \triangleq \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}$$

En general, la impedancia consta de una parte real (*resistencia*) y una parte imaginaria. La parte imaginaria de la impedancia se denomina *reactancia* y se denota por $X(\omega)$.

$$Z(j\omega) = \text{Re} \{Z(j\omega)\} + \text{Im} \{Z(j\omega)\} = R + jX(j\omega) \quad (2.8)$$

Igualmente, su recíproco, la admitancia también está constituida de una parte real (*conductancia*) y una parte imaginaria. La parte imaginaria de la admitancia se denomina *susceptancia* y se denota por $B(j\omega)$.

$$Y(j\omega) = \text{Re} \{Y(j\omega)\} + \text{Im} \{Y(j\omega)\} = G + jB(j\omega) \quad (2.9)$$

2.3. Respuesta en frecuencia

Considere el circuito RLC paralelo que se muestra en la figura 2.6.

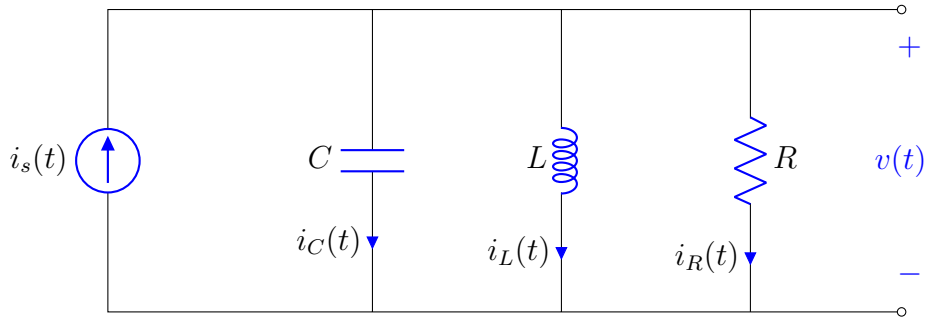


Figura 2.6: Circuito eléctrico RLC paralelo.

Determine la relación entre los fasores asociados a la corriente eléctrica en el resistor y a la corriente eléctrica de la fuente independiente de corriente.

De la primera ley de Kirchhoff, (LCK), y empleando fasores, se tiene

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{V}_C}{1} + \frac{\mathbf{V}_L}{j\omega L} + \mathbf{I}_R$$

Teniendo en cuenta la segunda ley de Kirchhoff, (LVK), $v_C = v_L = v_R = v = R i_R$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_s &= j\omega C R \mathbf{I}_R + \frac{R}{j\omega L} \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_R = \left(j\omega C R + \frac{R}{j\omega L} + 1 \right) \mathbf{I}_R \\ \frac{\mathbf{I}_R}{\mathbf{I}_s} &= \frac{1}{j\omega C R + \frac{R}{j\omega L} + 1} = \frac{1}{j \left(\omega C R - \frac{R}{\omega L} \right) + 1} \end{aligned}$$

Si se define la función de transferencia como la razón de los fasores asociados a las corrientes eléctricas de la resistencia y de la fuente independiente de la entrada, se tiene

$$H(j\omega) = \frac{\mathbf{I}_R}{\mathbf{I}_s} = \frac{1}{1 + jCR\left(\omega - \frac{1}{\omega CL}\right)} \quad (2.10)$$

Cuando¹

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

a este valor de frecuencia angular se le denomina *frecuencia de resonancia* y se denota con ω_o .

Aunque la ecuación (2.10) describe el comportamiento del circuito RLC paralelo; en la práctica se trabaja con dicha ecuación en una forma más apropiada, llamada forma *normalizada*, la cual se obtiene a continuación.

Multiplicando y dividiendo la parte imaginaria del denominador por ω_o y teniendo presente su valor, resulta

$$H(j\omega) = \frac{\mathbf{I}_R}{\mathbf{I}_s} = \frac{1}{1 + jCR\omega_o\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{1}{\omega CL\omega_o}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)} \quad (2.11)$$

donde $Q = CR\omega_o$. Este parámetro recibe el nombre de *factor de calidad*.

En la figura 2.7 se muestran las gráficas correspondientes a la magnitud y la fase de la ecuación (2.11) para diferentes valores del factor de calidad, Q . Estas gráficas reciben el nombre de *la respuesta en frecuencia*, para la entrada y la salida que se han especificado.

Se puede observar en la gráfica de la respuesta en frecuencia que cuando $\omega = \omega_o$, la magnitud de la función de transferencia es máxima y es igual a la unidad. Esto nos indica que el fasor asociado a la salida es igual al fasor asociado a la entrada y por consiguiente la corriente en el resistor es idéntica a la corriente eléctrica de la fuente independiente de corriente. También, se debe observar que las gráficas de la magnitud y fase dependen del factor de calidad Q . Este factor de calidad es igual a la razón de la magnitud del fasor de la corriente eléctrica en el inductor (o en el capacitor) a la frecuencia de resonancia y la magnitud del fasor de la corriente eléctrica de la fuente independiente. Esto es

$$Q = \frac{|\mathbf{I}_L|}{|\mathbf{I}_s|} = \frac{|\mathbf{I}_C|}{|\mathbf{I}_s|} \quad (2.12)$$

2.3.1. Ancho de banda

En el circuito eléctrico que se estudia, tanto para las frecuencias $\omega \ll \omega_o$ como para las frecuencias $\omega \gg \omega_o$, la magnitud de la salida se reduce considerablemente. Es por esto, que el circuito eléctrico se dice que es un *filtro pasa banda*. El *ancho de la banda*, AB, de un filtro eléctrico se define como el conjunto de frecuencias tales que la magnitud es mayor o igual al valor máximo de la magnitud entre la raíz cuadrada de 2, es decir

¹Este valor se encuentra derivando la magnitud con respecto a ω (la frecuencia angular) e igualándola a cero.

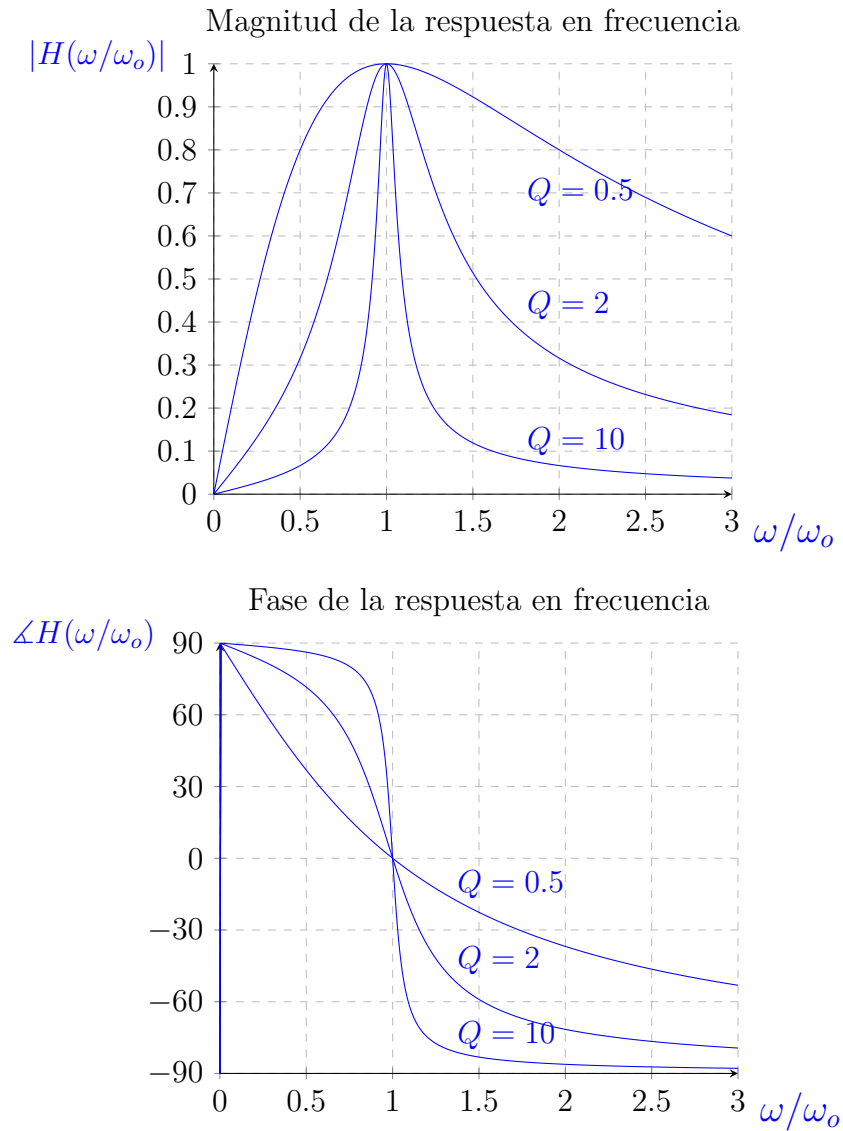


Figura 2.7: Respuesta en frecuencia del circuito RLC serie.

$$|H(j\omega)| \geq \frac{|H(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (2.13)$$

A continuación se determinan las nombradas *frecuencias de corte* ω_1 y ω_2 , que constituyen el ancho de banda de filtro pasa banda. De la ecuación (2.11)

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

entonces

$$Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2 = 1$$

de la raíz cuadrada

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right) = \pm 1$$

reacomodando

$$\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} = \pm \frac{1}{Q}$$

así

$$\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 \pm \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_o} - 1 = 0$$

se tiene

$$\frac{\omega}{\omega_o} = \frac{\pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{Q}\right)^2 + 4}}{2} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

considerando el signo positivo del radical

$$\omega_1 = \omega_o \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \right) \quad \text{y} \quad \omega_2 = \omega_o \left(\frac{+1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \right)$$

El ancho de banda es

$$AB = \omega_2 - \omega_1 = \omega_o \left(\frac{+1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} - \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \right) = \frac{\omega_o}{Q} \quad (2.14)$$

El factor de calidad, también se puede determinar a partir de

$$Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} \quad (2.15)$$

Conviene observar que la frecuencia de resonancia, ω_o , es la media geométrica de las frecuencias de corte ω_1 y ω_2

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_o \left(\frac{+1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \right) \omega_o \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \right) = \omega_o^2$$
$$\omega_o = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (2.16)$$

Ejemplo 2.1 Consideremos ahora el circuito RLC serie, que se muestra en la figura 2.8. Encuentre la relación entre el fasor asociado al voltaje en el resistor y el fasor asociado al voltaje de la fuente independiente, la entrada.

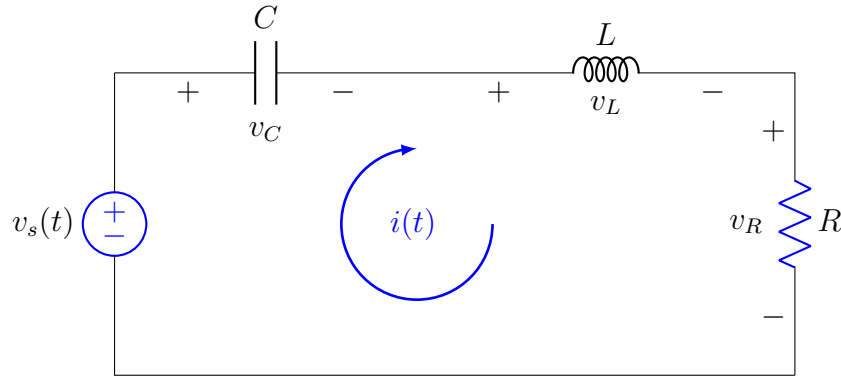


Figura 2.8: Circuito eléctrico RLC serie.

De la segunda ley de Kirchhoff y empleando fasores, se tiene

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_R = \frac{\mathbf{I}_C}{j\omega C} + j\omega L \mathbf{I}_L + \mathbf{V}_R$$

Teniendo en cuenta la primera ley de Kirchhoff, $i_C = i_L = i_R = i = \frac{v_R}{R}$

$$\mathbf{V}_s = \frac{1}{j\omega CR} \mathbf{V}_R + \frac{j\omega L}{R} \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_R = \left(\frac{1}{j\omega CR} + \frac{j\omega L}{R} + 1 \right) \mathbf{V}_R$$

$$\frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{V}_s} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega CR} + \frac{j\omega L}{R} + 1} = \frac{1}{j \left(-\frac{1}{\omega CR} + \frac{\omega L}{R} \right) + 1} = \frac{1}{j \frac{L}{R} \left(\omega - \frac{1}{\omega CL} \right) + 1}$$

por consiguiente

$$H(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{V}_s} = \frac{1}{1 + j \frac{L\omega_o}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{1}{\omega CL\omega_o} \right)} \quad (2.17)$$

con

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad Q = \frac{L\omega_o}{R}$$

En la función de transferencia, se tiene de nuevo

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)} \quad (2.18)$$

¿Qué se puede deducir?

En este caso, cuando $\omega = \omega_o$, la diferencia de potencial en el resistor es igual al voltaje de la fuente independiente. Y el factor de calidad Q , es igual a la razón de la magnitud del fasor del voltaje en el inductor (o en el capacitor), a la *frecuencia de resonancia* y la magnitud del fasor del voltaje de la fuente independiente.

$$Q = \frac{|\mathbf{V}_L|}{|\mathbf{V}_s|} = \frac{|\mathbf{V}_C|}{|\mathbf{V}_s|}$$

2.4. Potencia y energía en estado sinusoidal permanente

Con la finalidad de simplificar el análisis que se presenta, se consideran únicamente redes eléctricas lineales e invariantes en el tiempo operando en estado sinusoidal permanente, es decir se asumirá que todas las corrientes eléctricas y voltajes son sinusoidales de la misma frecuencia angular ω .

Recordando las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

2.4.1. Potencia instantánea y potencia promedio

Considere un *resistor* R por el cual circula una corriente eléctrica sinusoidal $i(t)$ cuyo fasor asociado es $\mathbf{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \exp(j\angle \mathbf{I})$ cuando se aplica el voltaje $v(t)$ cuyo fasor asociado es $\mathbf{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \exp(j\angle \mathbf{V})$. Entonces, dado que

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \angle \mathbf{I}) \quad y \quad v(t) = V_m \cos(\omega t + \angle \mathbf{V})$$

la *potencia instantánea*, $p(t)$, que se suministra al resistor es

$$p(t) = v(t)i(t) = RI_m \cos(\omega t + \angle \mathbf{I}) I_m \cos(\omega t + \angle \mathbf{I}) \quad (2.19)$$

por consiguiente

$$p(t) = \frac{1}{2}RI_m^2[1 + \cos 2(\omega t + \angle \mathbf{I})]$$

Se debe percatar que la potencia instantánea oscila *dos veces* en un período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ entre 0 y $\frac{RI_m^2}{2}$.

En el mismo orden de ideas, se denomina *potencia promedio* al valor promedio de la potencia instantánea, $p(t)$, esto es

$$P|_{\text{promedio}} \triangleq P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (2.20)$$

así

$$P = \frac{1}{2} RI_m^2 \quad (2.21)$$

Reemplacemos el resistor R por un *capacitor* C . Sea el voltaje en el capacitor C especificado por el fasor $\mathbf{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \exp(j\angle \mathbf{V})$. Por lo que el fasor asociado a la corriente eléctrica a través del capacitor C está dada por $\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V}$, así

$$i(t) = \text{Re} \{ j\omega C V_m \exp(j\angle \mathbf{V}) \exp(j\omega t) \} = \omega C V_m \cos \left(\omega t + \angle \mathbf{V} + \frac{\pi}{2} \right)$$

por lo que

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = \omega C V_m^2 \cos \left(\omega t + \angle \mathbf{V} \right) \cos \left(\omega t + \angle \mathbf{V} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \omega C V_m^2 \cos 2 \left(\omega t + \angle \mathbf{V} + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Se debe notar que la potencia instantánea en el capacitor oscila dos veces por periodo, entre $-\frac{1}{2} \omega C V_m^2$ y $+\frac{1}{2} \omega C V_m^2$.

La potencia promedio en un período es cero, como es de esperarse, ya que ninguna energía se disipa y $\frac{1}{2} \omega C v(0)^2$ (la energía inicial almacenada) es igual $\frac{1}{2} \omega C v(T)^2$ (la energía final almacenada) debido a que $v(\cdot)$ es sinusoidal de período T .

Si se tiene un *inductor* L , se puede obtener (*por dualidad*)

$$p(t) = \frac{1}{2} \omega L I_m^2 \cos 2 \left(\omega t + \angle \mathbf{I} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.23)$$

Dado que el capacitor (*ideal*) e inductor (*ideal*) son elementos sin pérdidas y por consiguiente no disipan energía, las ecuaciones (2.22) y (2.23) muestran, que la *potencia promedio* que se entrega a C y a L es cero. ¿Por qué?

Consideremos ahora la energía almacenada en el inductor L . En el tiempo t , es

$$\frac{1}{2} L i(t)^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 [\cos 2(\omega t + \angle \mathbf{I})]^2$$

Es obvio que siempre es positiva y que la *energía promedio almacenada* en L está dada por $\frac{1}{4} L I_m^2$.

Por supuesto, la forma dual se cumple para los capacitores.

2.4.2. Valor eficaz

En las ecuaciones anteriores, se expresó la corriente eléctrica como $\mathbf{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \exp(j\angle \mathbf{I})$, donde I_m es la *amplitud* de la sinusoidal $i(t)$; también se tiene el factor $\frac{1}{2}$ en la expresión de la potencia promedio, ecuación (2.21). Para deshacerse de este factor, los ingenieros eléctricos utilizan *valores efectivos, eficaces* o valores *RMS* –siglas del inglés que significan ² “raíz cuadrada del valor medio del cuadrado”– y que para una señal sinusoidal, su valor correspondiente es

$$i(t) \Big|_{\text{rms}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad v(t) \Big|_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \qquad (2.24)$$

entonces, como $V_m = RI_m$, se tiene (véase (2.21)).

$$P = RI_{\text{rms}}^2 \qquad P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \qquad (2.25)$$

ecuaciones idénticas para el caso de la corriente directa.

2.4.3. Potencia en el circuito eléctrico de un puerto

Considere el generador G que alimenta al circuito eléctrico de un puerto, lineal e invariante en el tiempo η , como se muestra en la figura 2.9.

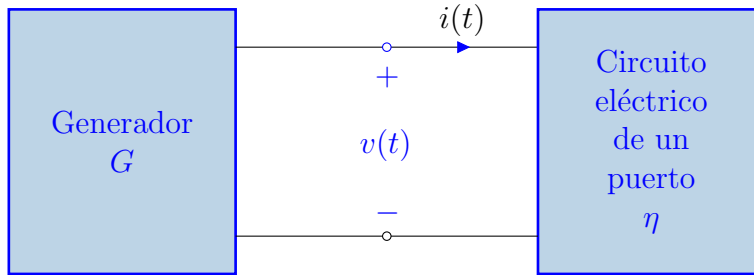


Figura 2.9: El generador G alimenta, en estado sinusoidal permanente, al circuito eléctrico de un puerto, η .

Suponga que el circuito eléctrico de un puerto η se encuentra en estado sinusoidal permanente. Sean \mathbf{V} e \mathbf{I} los fasores asociados a las variables de puerto $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta + \phi)$ e $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$. La potencia instantánea que entrega el generador G al circuito eléctrico de un puerto η , en el tiempo t , es

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m \cos(\omega t + \theta + \phi) I_m \cos(\omega t + \theta)$$

ecuación que se puede escribir como

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_m I_m}{2} \left[\cos(2\omega t + 2\theta + \phi) + \cos(\phi) \right] \qquad (2.26)$$

²Root Mean Square. $V_{\text{eficaz}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} v^2(t) dt}$

La corriente eléctrica $i(t)$, el voltaje $v(t)$, y la potencia instantánea $p(t)$ se esbozan en la figura 2.10.

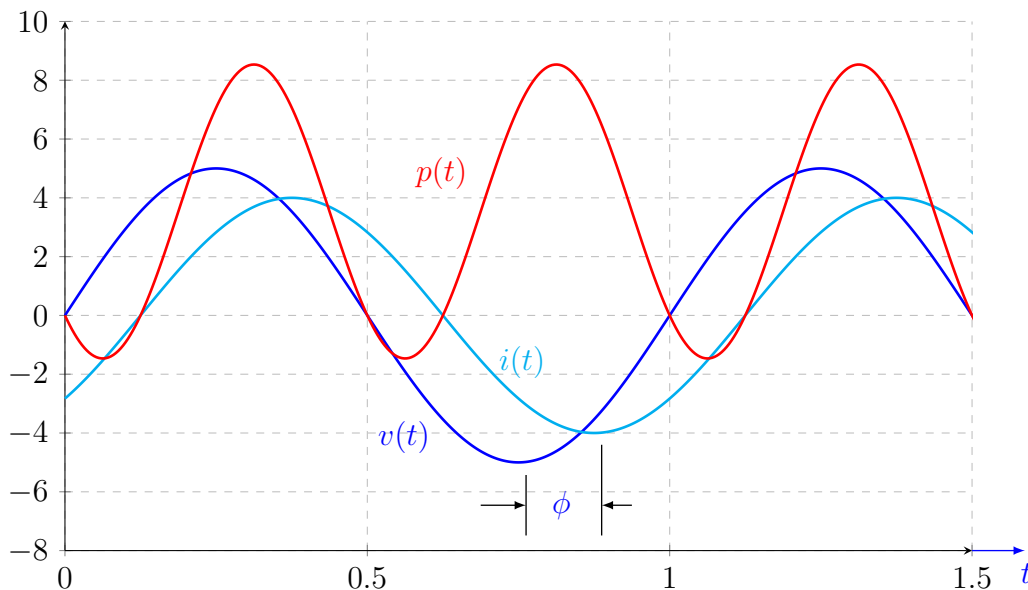


Figura 2.10: Gráficas del voltaje de puerto, $v(t)$, corriente eléctrica de puerto, $i(t)$ y la potencia instantánea, $p(t)$.

La potencia promedio se encuentra con la ecuación (2.20), por tanto

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\phi) = \frac{1}{2}V_m I_m \cos \phi = \frac{1}{2}V_m I_m F_p \quad (2.27)$$

De lo anterior, es posible dilucidar lo siguiente:

La potencia promedio depende no sólo de la *amplitud* de las señales sinusoidales $v(t)$ e $i(t)$, sino también de su diferencia de fases $\angle \mathbf{V} - \angle \mathbf{I} = \phi$. El factor $\cos(\angle \mathbf{V} - \angle \mathbf{I}) = \cos \phi$ es de extrema importancia en ingeniería eléctrica y se denomina *factor de potencia*, F_p .

Por otra parte, como $\mathbf{V} = Z(j\omega)\mathbf{I}$, donde $Z(j\omega)$ es la impedancia en el punto en que opera el circuito eléctrico η , se tiene

$$\angle \mathbf{V} - \angle \mathbf{I} = \angle Z(j\omega) = \phi \quad (2.28)$$

2.4.4. Potencia compleja

Cuando el circuito eléctrico de un puerto η está constituido sólo por resistencias (carga eléctrica resistiva *pura*), la corriente eléctrica se emplea totalmente en llevar la (energía) potencia del generador a dicha carga resistiva. Pero cuando la carga eléctrica está integrada tanto por resistencias como por *elementos reactivos*, una componente de la corriente eléctrica se destina para transportar la energía que periódicamente se almacena y descarga en la reactancia. Esta energía que se absorbe y libera alternativamente en el campo magnético de un inductor y el campo eléctrico de un capacitor, se adiciona a la corriente eléctrica en el circuito eléctrico, pero no se suma a la potencia

promedio. Desde este punto de vista, la *potencia promedio* en un circuito eléctrico se denomina *potencia activa* y la potencia que suministra la energía a los elementos reactivos recibe el nombre de *potencia reactiva*, ésta se representa como jQ .

Para el circuito eléctrico de la figura 2.9, operando en el estado sinusoidal permanente, se define

$$S \triangleq P + jQ = \mathbf{V}\mathbf{I}^* \quad (2.29)$$

como la *potencia compleja* que suministra el generados G al circuito eléctrico de un puerto η . A su magnitud, $|S|$, se le nombra *potencia aparente*. Las unidades de ambas cantidades son *volt – amper* $\equiv [VA]$. Obviamente

$$S = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\phi) + j \frac{V_m I_m}{2} \sin(\phi) \quad (2.30)$$

el primer término representa la potencia activa, sus unidades son *watts* $\equiv [W]$ y el segundo término constituye la potencia reactiva, con las unidades *volts amperes reactivos* $\equiv [VAR]$.

Cuando la corriente eléctrica se adelanta al voltaje, el factor de potencia se considera de adelanto. Asimismo, cuando la corriente eléctrica está atrasada con respecto al voltaje, el factor de potencia se dice que es atrasado. En nuestros hogares se recibe la energía eléctrica a través de las líneas de transmisión a un V_m constante; esto es, el valor pico del voltaje suministrado no cambia. La potencia activa que se consume varía durante el día, dependiendo del número de aparatos eléctricos en uso en un momento dado. Así, la corriente eléctrica en las líneas que la transportan se puede calcular con la siguiente ecuación.

$$I_m = \frac{2P}{V_m Fp} \quad (2.31)$$

Dado que la corriente eléctrica es inversamente proporcional al factor de potencia, mientras menor es el Fp , mayor es la cantidad de corriente eléctrica necesaria para satisfacer la demanda de potencia. Cuando el Fp es unitario, se tiene la mínima corriente eléctrica necesaria para proporcionar la potencia deseada. Esta es la situación deseable ya que las pérdidas en las líneas de transmisión, proporcionales al cuadrado de la corriente eléctrica de línea, son mínimas. En las aplicaciones industriales en las cuales la potencia se demanda a un factor de potencia bajo, se requiere llevar el factor de potencia cerca de la unidad para proporcionar la potencia solicitada con una corriente eléctrica menor y por lo tanto con menores pérdidas por línea.

La relación entre las potencias que se estudian puede enfatizarse mediante el triángulo de potencias que se muestra en la figura 2.11.

Existen expresiones alternativas para determinar a S , cuando

$$\mathbf{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle(\theta + \phi) \quad \mathbf{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle\theta \quad \implies \quad \mathbf{I}^* = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle-\theta$$

dado que

$$S = \mathbf{V}\mathbf{I}^* = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle(\theta + \phi) \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle-\theta = \frac{V_m I_m}{2} \angle\phi = |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| \angle\phi$$

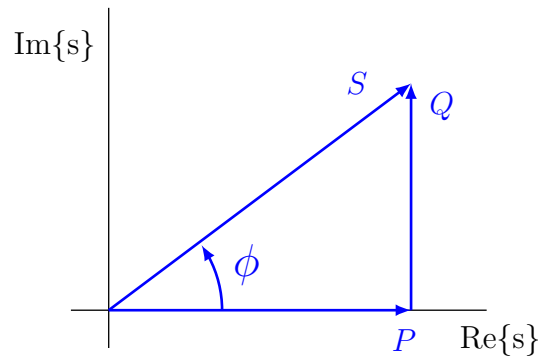


Figura 2.11: Un triángulo de potencias.

y

$$Z(j\omega) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{I}|} \angle \phi = |Z(j\omega)| \angle Z(j\omega)$$

entonces

$$S = |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| \angle \phi = |\mathbf{I}|^2 \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{I}|} \angle \phi = |\mathbf{I}|^2 Z(j\omega) = |\mathbf{I}|^2 R + j |\mathbf{I}|^2 X(j\omega) \quad (2.32)$$

también

$$\begin{aligned} S &= |\mathbf{I}|^2 Z(j\omega) = \frac{|\mathbf{V}|^2}{|Z(j\omega)|^2} Z(j\omega) = \frac{|\mathbf{V}|^2}{R^2 + X(j\omega)^2} (R + jX(j\omega)) \\ &= \frac{|\mathbf{V}|^2}{R^2 + X(j\omega)^2} R + j \frac{|\mathbf{V}|^2}{R^2 + X(j\omega)^2} X(j\omega) \end{aligned} \quad (2.33)$$

En el mismo orden de ideas, cuando la impedancia en el circuito eléctrico η es predominantemente *resistiva-inductiva* la relación entre la potencias compleja, activa y reactiva se muestra en la figura 2.12. Como se puede apreciar tanto la potencia activa como la potencia reactiva son positivas.

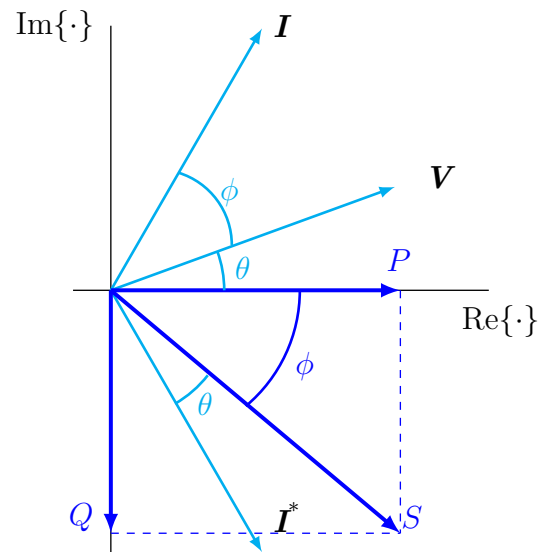
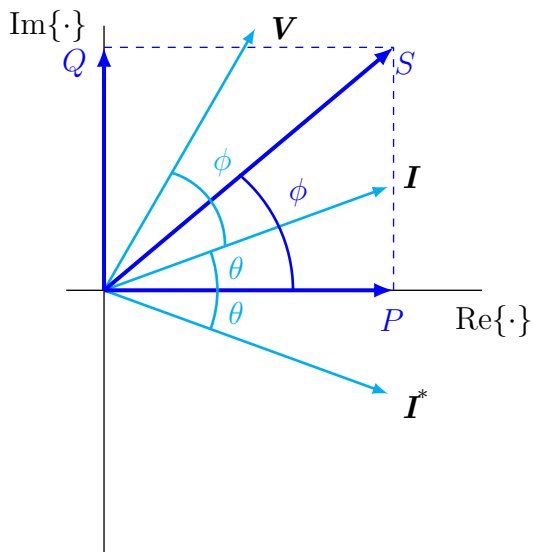


Figura 2.12: Carga eléctrica resistiva-inductiva. Figura 2.13: Carga eléctrica resistiva-capacitiva.

Empero, cuando la impedancia en el circuito eléctrico η es predominantemente *resistiva-capacitiva*, la potencia activa es positiva (como debe ser) y la potencia reactiva es negativa; como se visualiza en la figura 2.13. Se ha acordado que en lugar de considerar que el consumo de potencia reactiva en un capacitor sea negativo, se estima o se dice que el capacitor *genera o produce* potencia reactiva.

2.4.5. Corrección del factor de potencia

Como se mencionó, las compañías generadoras de energía requieren que el factor de potencia sea igual a la unidad, para proporcionar una cantidad de potencia requerida con corrientes eléctricas mínimas y por consiguiente con menor pérdida en las líneas de distribución.

Cuando la impedancia de la carga eléctrica es únicamente resistiva el factor de potencia es igual a la unidad, $\phi = 0^\circ$, mientras que cuando es reactiva pura el factor de potencia es igual a cero, $\phi = \pm 90^\circ$. En el caso general cuando la impedancia de la carga eléctrica es de la forma

$$Z(j\omega) = R + jX(j\omega)$$

el factor de potencia se puede variar, si se modifica la impedancia de la carga eléctrica. Lo anterior se logra al conectar en paralelo otra impedancia $Z_m(j\omega)$, como se muestra en la figura 2.14, que satisfaga las siguientes condiciones

- Z_m no debe consumir potencia activa.
- Z_m con Z debe satisfacer el factor de potencia que se desea.

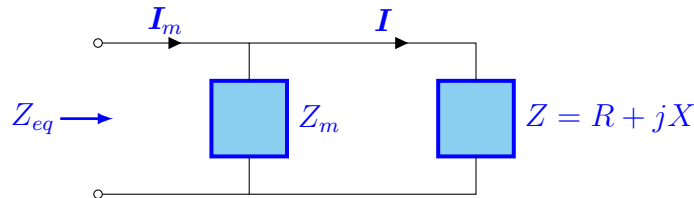


Figura 2.14: Circuito eléctrico para corregir el factor de potencia.

La primera condición implica que Z_m sea únicamente reactiva, esto es

$$Z_m = jX_m \quad (2.34)$$

La segunda condición requiere que

$$Fp_{deseado} = \cos \left[\arctan \left(\frac{Im\{Z_{eq}\}}{Re\{Z_{eq}\}} \right) \right] \quad (2.35)$$

y dado que

$$Z_{eq} = \frac{Z Z_m}{Z + Z_m} = X_m \frac{RX_m + j(R^2 + X X_m + X^2)}{R^2 + (X + X_m)^2}$$

El argumento de la impedancia equivalente es

$$\angle Z_{eq} = \arctan \left[\frac{R^2 + XX_m + X^2}{RX_m} \right]$$

como el factor de potencia está dado por

$$F_p = \cos \left[\arctan \left[\frac{R^2 + XX_m + X^2}{RX_m} \right] \right]$$

así

$$\arccos (F_p) = \arctan \left[\frac{R^2 + XX_m + X^2}{RX_m} \right]$$

ahora

$$\tan [\arccos (F_p)] = \frac{R^2 + XX_m + X^2}{RX_m}$$

por lo que

$$X_m = \frac{R^2 + X^2}{R \tan [\arccos (F_{p_{deseado}})] - X} \quad (2.36)$$

con $\tan(\arccos(F_p)) > 0$ si el F_p es de atrasado y $\tan(\arccos(F_p)) < 0$ si el F_p es de adelantado.

Ejemplo 2.2 Un generador eléctrico alimenta a una soldadora eléctrica, a un calentador eléctrico y a un motor, como se observa en la figura 2.15. Se emplea un capacitor para suministrar la potencia reactiva que requieren la soldadora eléctrica y el motor, y permitir que el generador eléctrico opere a un *factor de potencia unitario*. Encuentre la potencia activa que suministra el generador eléctrico y la reactiva que debe suministrar el capacitor. Si no se utiliza el capacitor, ¿qué potencia aparente tendría que ser suministrada por el generador eléctrico? El voltaje del generador eléctrico es de $120[V]_{rms}$ con una frecuencia de 60 [Hz].

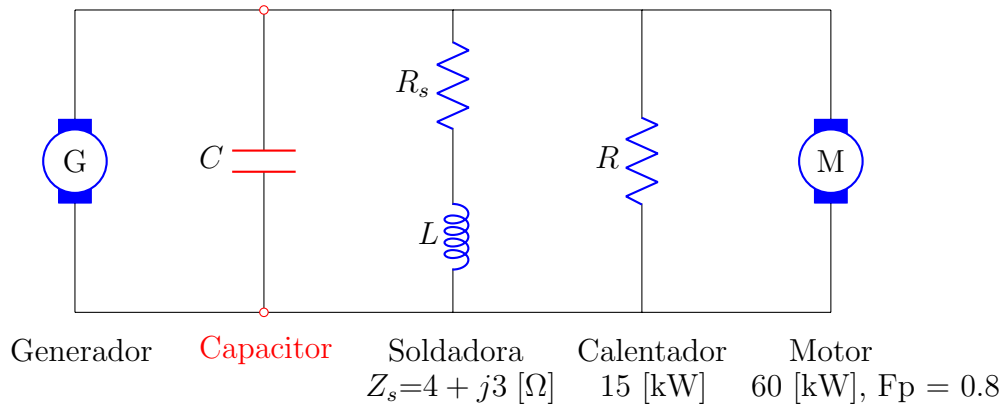


Figura 2.15: Circuito eléctrico.

2.4.6. Superposición y potencia

Cuando una red eléctrica incluye dos o más fuentes independientes, ¿Qué potencia eléctrica se suministra o se consume? Para contestar la pregunta anterior, considere el circuito eléctrico de la figura 2.16.

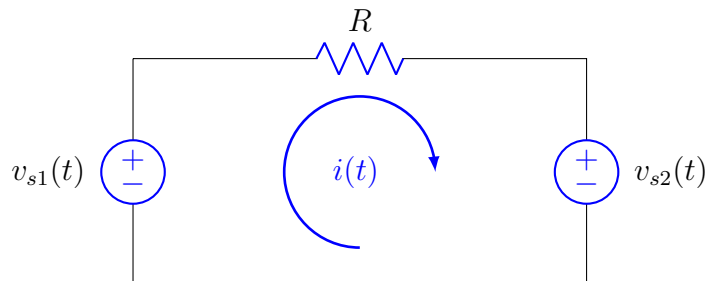


Figura 2.16: Circuito eléctrico lineal con dos fuentes independientes de voltaje.

Dado que el circuito eléctrico es lineal, se puede aplicar el principio de superposición, por lo que la corriente eléctrica $i(t)$ que circula a través del resistor R es

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

donde $i_1(t)$ e $i_2(t)$ son, respectivamente, las corrientes ocasionadas por $v_{s1}(t)$ y $v_{s2}(t)$ cuando actúan por separado. En consecuencia, la potencia instantánea es

$$\begin{aligned} p(t) &= Ri(t)^2 = R[i_1(t) + i_2(t)]^2 \\ &= Ri_1(t)^2 + Ri_2(t)^2 + 2Ri_1(t)i_2(t) \end{aligned}$$

los dos primeros elementos del término de la derecha de la ecuación anterior son las potencias instantáneas debidas a $v_{s1}(t)$ y $v_{s2}(t)$, cuando actúan por separado. Esto es

$$p_1(t) = Ri_1(t)^2 \quad y \quad p_2(t) = Ri_2(t)^2$$

En general $2R i_1(t)i_2(t) \neq 0$, y por consiguiente $p(t) \neq p_1(t) + p_2(t)$, por lo que es necesario tener precaución si se recurre al principio de superposición para encontrar la potencia instantánea.

Cuando las variables eléctricas son periódicas con periodo T , la potencia promedio o activa está definida por

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

así

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T [p_1(t) + p_2(t) + 2Ri_1(t)i_2(t)] dt \\ P &= P_1 + P_2 + \frac{2R}{T} \int_0^T i_1(t)i_2(t) dt \end{aligned}$$

los dos primeros elementos del miembro derecho de la ecuación anterior son las potencias activas debidas a $v_{s1}(t)$ y $v_{s2}(t)$ cuando actúan por separado. Si

$$\frac{2R}{T} \int_0^T i_1(t)i_2(t)dt = 0$$

entonces, es posible aplicar el principio de superposición ya que $P = P_1 + P_2$.

Esta condición se cumple cuando la corriente eléctrica $i(t)$ está compuesta de sinusoides de diferente frecuencia. Lo anterior equivale a decir que las corrientes eléctricas son *funciones ortogonales* en el intervalo de $t = t_1$ a $t = t_1 + kT$ donde k es un entero. Esto es, si

$$\begin{aligned}i_1(t) &= I_{m1} \cos(m\omega t + \theta_1) \\i_2(t) &= I_{m2} \cos(n\omega t + \theta_2)\end{aligned}$$

se tiene

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_1(t)i_2(t)dt = \begin{cases} \frac{I_{m1}I_{m2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Por tanto, si $m = n$, el principio de superposición no se aplica. Pero cuando $m \neq n$ se puede recurrir al principio de superposición. Este resultado se puede generalizar para el caso de sinusoides periódicas con diferentes frecuencias. *La potencia promedio debida a la suma de sinusoides de diferente frecuencia es la suma de las potencias promedio ocasionadas por cada una de las sinusoides actuando por separado.*

2.5. Circuitos trifásicos

Hasta ahora se han considerado redes eléctricas con sólo un par de terminales conectadas a ella. A continuación se estudian otro tipo de redes eléctricas, de igual importancia práctica, con tres o cuatro terminales que entran o salen de la misma. Se conocen como *circuitos eléctricos de tres fases* o simplemente *circuitos trifásicos*, y que generalmente se emplean en la transmisión de energía eléctrica. Por supuesto que son más laboriosas de analizar que las redes eléctricas de dos terminales. Sin embargo, la mayoría de los sistemas trifásicos son aproximadamente balanceados, y si un sistema se puede considerar balanceado la simplicidad en su análisis resulta ser notable.

Un sistema trifásico es un sistema en el que los voltajes generados son iguales en magnitud y frecuencia pero que difieren por un tercio en el ciclo de tiempo, lo que corresponde a 120° en el ángulo de la fase. Cuando estos voltajes balanceados se aplican a impedancias iguales, resultan corrientes eléctricas balanceadas. Y si un sistema está balanceado se puede analizar considerando sólo una de las tres fases; sin importar que tan complicadas sean las plantas generadoras, las redes eléctricas de transmisión o los centros de consumo.

A manera de introducción, se mencionan brevemente las causas por las que la mayoría de las redes eléctricas de transmisión en el mundo son de hecho sistemas trifásicos de corriente eléctrica alterna.

En primer lugar se prefiere la corriente eléctrica alterna a la corriente eléctrica directa porque sus voltajes se pueden modificar por medio de transformadores. Esto permite una transmisión y distribución más económica y conveniente. La frecuencia de 60 ciclos por segundo es consecuencia del coste-beneficio entre la economía de la maquinaria a altas frecuencias y el decremento de la reactancia de transmisión a bajas frecuencias.

Se prefiere la operación trifásica a la operación monofásica debido a que los devanados trifásicos hacen un uso más eficiente del hierro y cobre del generador eléctrico y porque el flujo de potencia eléctrica en los sistemas trifásicos es regular y estable antes que pulsante. Los motores trifásicos arrancan en forma más conveniente y tienen un par constante, su velocidad es más satisfactoria que la de los motores monofásicos. Los grandes generadores eléctricos monofásicos, debido a que la potencia eléctrica es pulsante, vibran mucho y son muy ruidosos. La potencia trifásica se puede modificar por medio de transformadores apropiados a potencia de cualquier otro número de fases diferente; lo que no ocurre con la potencia eléctrica monofásica, pues al ser pulsante, no puede suministrar una potencia uniforme mediante simple transformación.

Los sistemas trifásicos son en general, un poco más económicos que otros sistemas polifásicos. Las complicaciones de fases adicionales no compensa el leve incremento en la eficiencia de operación.

En la figura 2.17 se muestran los voltajes o las *tensiones* de un generador eléctrico trifásico. Donde es de notar que la suma de tales tensiones en todo tiempo es nula.

Estas tensiones alcanzan su máximo valor en el orden que se muestra en la figura 2.17, es decir $v_{ab}(t)$, $v_{bc}(t)$, $v_{ca}(t)$, $v_{ab}(t)$, $v_{bc}(t)$, \dots , se designan *tensiones de línea* y corresponden a la diferencia de potencial entre cada par de fases. A esta sucesión se le denomina *secuencia de fase positiva*. Si los voltajes tuvieran otro orden se considera *secuencia de fase negativa*.

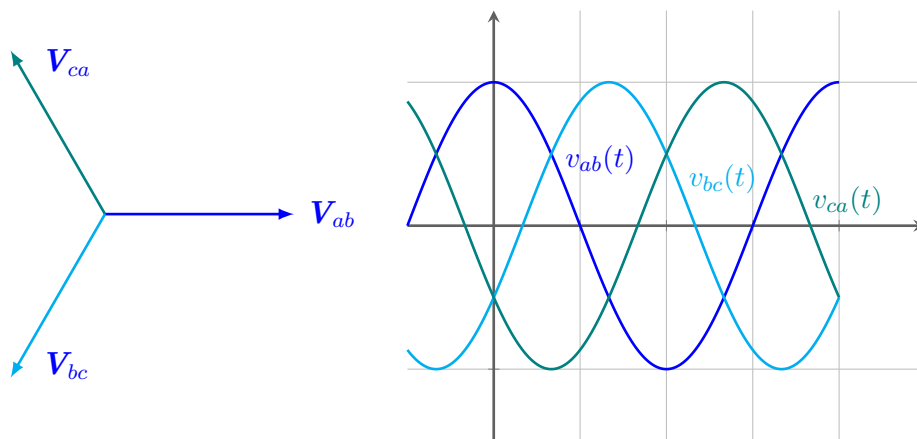


Figura 2.17: Tensiones trifásicas de secuencia de fase positiva.

Por otro lado, se llaman *tensiones de fase* o *tensiones al neutro*, a los voltajes entre cualquiera de las fases y el neutro. Veamos cual es la relación entre las tensiones de línea y las tensiones de fase.

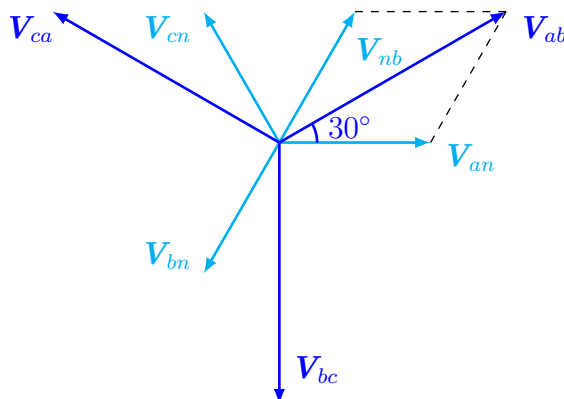


Figura 2.18: Diagrama fasorial de voltajes de línea y voltajes de fase.

Si

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ, \quad \mathbf{V}_{bn} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle -120^\circ \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_{cn} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 120^\circ$$

dado que

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} = \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ + \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ = \frac{V_m}{\sqrt{2}} [\cos(0^\circ) + j \operatorname{sen}(0^\circ) + \cos(60^\circ) + j \operatorname{sen}(60^\circ)] \\ \mathbf{V}_{ab} &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \left[1 + j0 + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \left[\frac{3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \sqrt{3} \angle 30^\circ = \sqrt{3} \mathbf{V}_{an} \angle 30^\circ \end{aligned}$$

lo que equivale a decir que *la tensión de línea* \mathbf{V}_{ab} es $\sqrt{3}$ *la tensión de fase* \mathbf{V}_{an} y está adelantada 30° con respecto a ella. Este resultado se puede apreciar gráficamente en la figura 2.18. Procediendo

de manera similar, se tiene

$$V_{bc} = \sqrt{3} V_{bn} \angle 30^\circ \quad V_{ca} = \sqrt{3} V_{cn} \angle 30^\circ$$

Ahora, se determina la correspondencia entre las *corrientes eléctricas de línea* I_a , I_b , e I_c y las *corrientes eléctricas de fase* I_{ab} , I_{bc} e I_{ca} para una carga eléctrica conectada en *delta*, la cual se observa en la figura 2.19 y en la que sin perder generalidad, con fines de simplicidad únicamente, se considera que la carga eléctrica trifásica es resistiva.

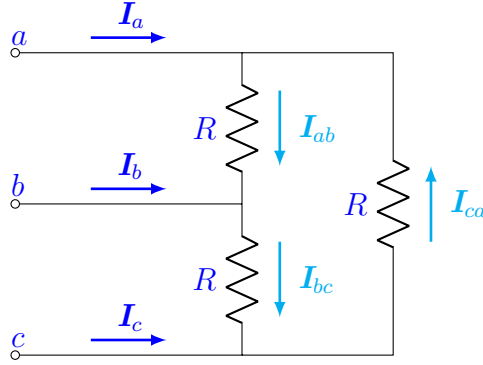


Figura 2.19: Corrientes eléctricas de línea y corrientes eléctricas de fase.

En la figura 2.20 se visualizan los pasos para encontrar las relaciones deseadas. Si las corrientes eléctricas de fase son $I_{ab} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$, $I_{bc} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle -120^\circ$ e $I_{ca} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle 120^\circ$, de la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK), se tiene que la corriente de línea I_a es

$$I_a = I_{ab} - I_{ca} = I_{ab} + I_{ac}$$

entonces

$$I_a = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ + \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle -60^\circ = \frac{I_m}{\sqrt{2}} [\cos(0^\circ) + j \operatorname{sen}(0^\circ) + \cos(-60^\circ) + j \operatorname{sen}(-60^\circ)]$$

$$I_a = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \left[1 + j0 + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \left[\frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{3} \angle -30^\circ = \sqrt{3} I_{ab} \angle -30^\circ$$

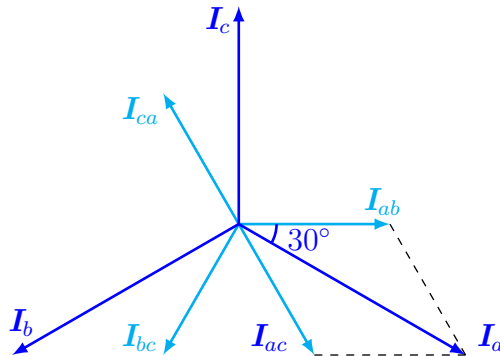


Figura 2.20: Diagrama fasorial de las corrientes eléctricas de línea y las corrientes eléctricas de fase.

Procediendo de manera similar, las otras corrientes de línea son

$$I_b = \sqrt{3} I_{bc} \angle -30^\circ \quad I_c = \sqrt{3} I_{ca} \angle -30^\circ$$

En la figura 2.20 se muestran los fasores correspondientes a las corrientes eléctricas de línea y las corrientes eléctricas de fase para un sistema trifásico de secuencia de fase positiva.

Cabe señalar que si las impedancias de una carga balanceada no son resistivas puras, las corrientes eléctricas de fase y por consiguiente las corrientes eléctricas de línea también son balanceadas, pero con un desplazamiento angular de atraso cuando la *reactancia* es inductiva o un desplazamiento angular de adelanto si la *reactancia* es capacitiva.

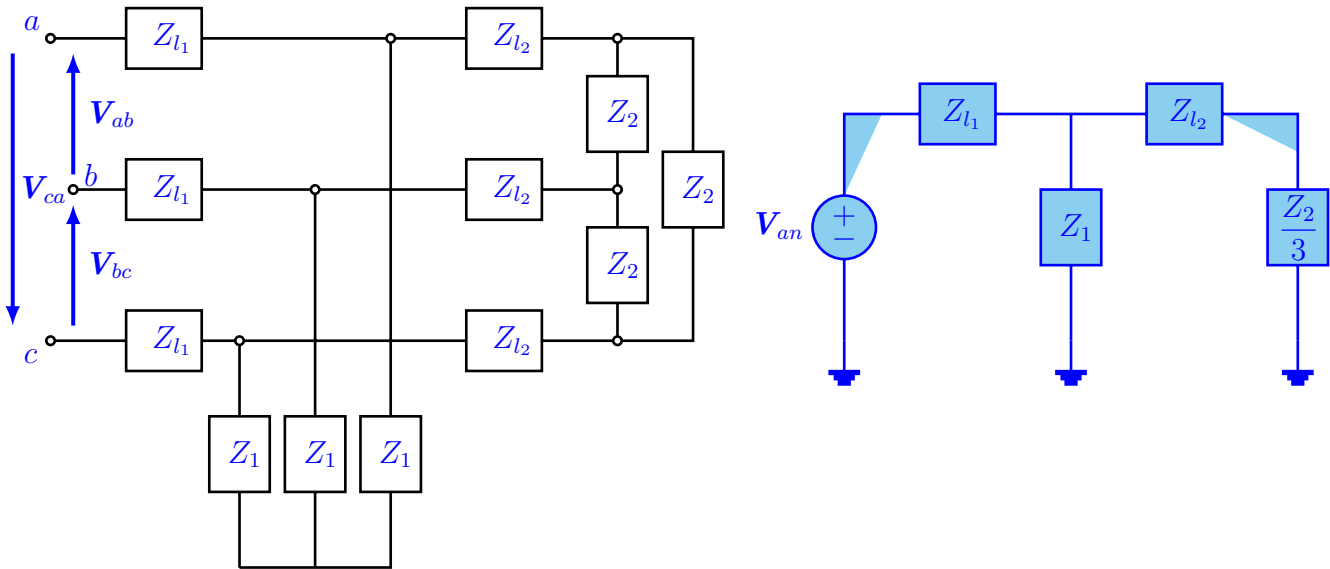


Figura 2.21: Diagrama trifilar y su diagrama unifilar asociado.

En otro orden de ideas, es importante señalar que cuando la carga eléctrica trifásica es balanceada no es necesario analizar todo el circuito eléctrico trifásico, basta considerar una sola fase, ya que las corrientes de las otras fases tienen la misma magnitud pero con un desfase de $\pm 120^\circ$, respectivamente. El circuito eléctrico asociado a una sola fase recibe el nombre de *diagrama unifilar*.

En la figura 2.21, se muestra un *diagrama trifilar* y su diagrama unifilar asociado, en donde la fase de referencia es la correspondiente a V_{an} . Si la carga trifásica balanceada está conectada en estrella, su impedancia Z en el diagrama unifilar es la propia de cada rama de la estrella. Empero, si la carga trifásica balanceada está conectada en delta, su impedancia Z en el diagrama unifilar es un tercio de la propia de cada rama de la delta.

Con la finalidad de esclarecer algunas ideas, consideremos lo siguiente:

La potencia activa en una fase de una carga eléctrica balanceada conectada en estrella es

$$P_\phi = |V_{an}| |I_a| Fp$$

donde Fp es el coseno del ángulo de desfase entre el voltaje de fase y la corriente eléctrica de línea, que corresponde al ángulo del argumento de la impedancia de la carga eléctrica. La potencia activa total es, obviamente, tres veces la potencia activa de una fase, es decir

$$P_{3\phi} = 3P_{\phi} = 3|\mathbf{V}_{an}||\mathbf{I}_a| Fp$$

pero se sabe que $|\mathbf{V}_{ab}| = \sqrt{3}|\mathbf{V}_{an}|$. por lo que

$$P_{3\phi} = 3\frac{|\mathbf{V}_{ab}|}{\sqrt{3}}|\mathbf{I}_a| Fp = \sqrt{3}|\mathbf{V}_{ab}||\mathbf{I}_a| Fp$$

Asimismo, la potencia activa de una fase de una carga eléctrica balanceada conectada en delta es

$$P_{\phi} = |\mathbf{V}_{ab}||\mathbf{I}_{ab}| Fp$$

donde Fp es el coseno del ángulo de desfase entre el voltaje de línea y la corriente eléctrica de fase, que corresponde al ángulo del argumento de la impedancia de la carga eléctrica. La potencia activa total es, obviamente, tres veces la potencia activa de una fase, es decir

$$P_{3\phi} = 3P_{\phi} = 3|\mathbf{V}_{ab}||\mathbf{I}_{ab}| Fp$$

pero se sabe que $|\mathbf{I}_a| = \sqrt{3}|\mathbf{I}_{ab}|$. por lo que

$$P_{3\phi} = 3|\mathbf{V}_{ab}|\frac{|\mathbf{I}_a|}{\sqrt{3}} Fp = \sqrt{3}|\mathbf{V}_{ab}||\mathbf{I}_a| Fp$$

como era de esperar, para una carga eléctrica equivalente, ambas expresiones son idénticas, al tener en cuenta la transformación delta a estrella o viceversa.

Ejemplo 2.3 En el sistema eléctrico que se exhibe en la figura 2.22, encuentre las corrientes eléctricas de línea \mathbf{I}_a , \mathbf{I}_b e \mathbf{I}_c . Considere una secuencia de fase positiva y $\mathbf{V}_{ab} = 400\angle 0^\circ$ [V].³ Si

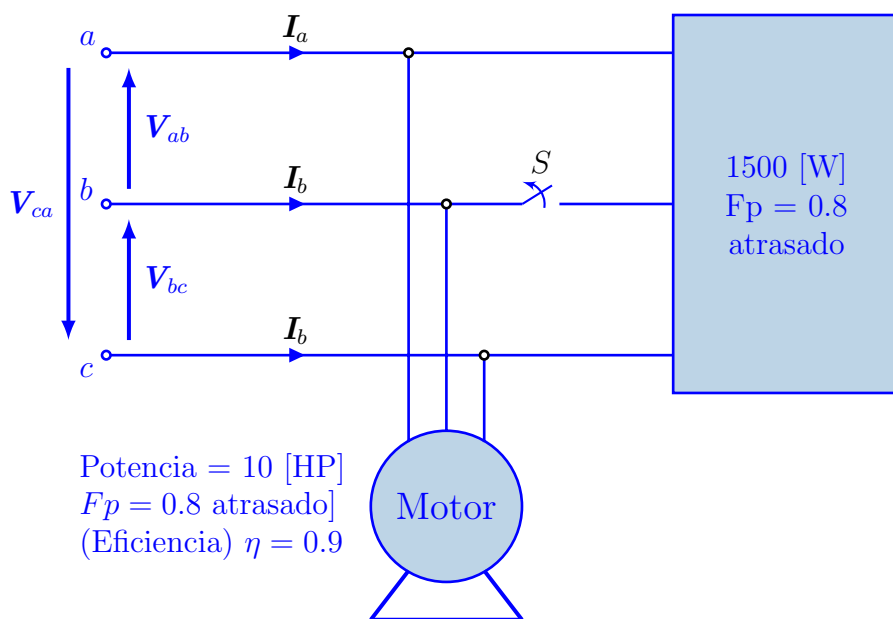


Figura 2.22: Red eléctrica trifásica.

³1HP = 746 [W]

a) El interruptor S está cerrado.

b) El interruptor S está abierto.

2.5.1. Método de los dos wattmetros

A continuación se verifica que con el método de los dos wattmetros es viable determinar la potencia activa total trifásica.

Sea una carga eléctrica trifásica conectada en delta, la potencia total es entonces

$$S_{3\phi} = \mathbf{V}_{ab}\mathbf{I}_{ab}^* + \mathbf{V}_{bc}\mathbf{I}_{bc}^* + \mathbf{V}_{ca}\mathbf{I}_{ca}^* \quad (2.37)$$

en un circuito eléctrico trifásico de secuencia de fase positiva, de la ley de corriente de Kirchhoff

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_{ca} &= \mathbf{I}_{ab} & \implies & \mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{ab} - \mathbf{I}_{ca} \\ \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_{ab} &= \mathbf{I}_{bc} & \implies & \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{bc} - \mathbf{I}_{ab} \\ \mathbf{I}_c + \mathbf{I}_{bc} &= \mathbf{I}_{ca} & \implies & \mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{ca} - \mathbf{I}_{bc} \end{aligned} \quad (2.38)$$

de la ecuación (2.38)

$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0 \quad (2.39)$$

Regresando a la ecuación (2.37)

$$S_{3\phi} = (\mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn})\mathbf{I}_{ab}^* + (\mathbf{V}_{bn} - \mathbf{V}_{cn})\mathbf{I}_{bc}^* + (\mathbf{V}_{cn} - \mathbf{V}_{an})\mathbf{I}_{ca}^* \quad (2.40)$$

factorizando

$$S_{3\phi} = \mathbf{V}_{an}(\mathbf{I}_{ab}^* - \mathbf{I}_{ca}^*) + \mathbf{V}_{bn}(\mathbf{I}_{bc}^* - \mathbf{I}_{ab}^*) + \mathbf{V}_{cn}(\mathbf{I}_{ca}^* - \mathbf{I}_{bc}^*) \quad (2.41)$$

con la ecuación (2.38)

$$S_{3\phi} = \mathbf{V}_{an}\mathbf{I}_a^* + \mathbf{V}_{bn}\mathbf{I}_b^* + \mathbf{V}_{cn}\mathbf{I}_c^* \quad (2.42)$$

de la ecuación (2.39)

$$\mathbf{I}_b = -\mathbf{I}_a - \mathbf{I}_c \quad (2.43)$$

sustituyendo la ecuación anterior en la (2.42)

$$\begin{aligned} S_{3\phi} &= \mathbf{V}_{an}\mathbf{I}_a^* + \mathbf{V}_{bn}(-\mathbf{I}_a^* - \mathbf{I}_c^*) + \mathbf{V}_{cn}\mathbf{I}_c^* \\ S_{3\phi} &= (\mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn})\mathbf{I}_a^* + (\mathbf{V}_{cn} - \mathbf{V}_{bn})\mathbf{I}_c^* \\ S_{3\phi} &= \mathbf{V}_{ab}\mathbf{I}_a^* + \mathbf{V}_{cb}\mathbf{I}_c^* \end{aligned} \quad (2.44)$$

Como comentario final, se debe enfatizar que la suma algebraica de las lecturas de los dos wattmetros proporciona la potencia promedio o activa que consume la carga eléctrica trifásica.

Capítulo 3

Métodos generales de análisis de redes eléctricas

3.1. Introducción

En este capítulo se estudian métodos o procedimientos poderosos e ingeniosos para el estudio y el análisis de las redes eléctricas de parámetros concentrados. El objetivo primordial de estos métodos se puede definir en forma lacónica: dada la gráfica asociada de una red eléctrica, las características de las ramas que la conforman, las formas de onda de las entradas y las condiciones iniciales, *encontrar todos los voltajes y las corrientes eléctricas de rama.*

3.2. Transformación de fuentes

En el estudio y análisis de las redes eléctricas, en principio, es conveniente *transformar* las fuentes independientes *ideales*, tanto de voltaje como de corriente, en fuentes independientes *reales*. Para realizar lo anterior, se introducen dos transformaciones que permiten trastocar las fuentes de la red eléctrica sin que cambien las relaciones de voltajes y de corrientes eléctricas de dicha red eléctrica. Estas transformaciones se pueden aplicar tanto a las fuentes independientes como a las fuentes dependientes (que se introducen y estudian más adelante).

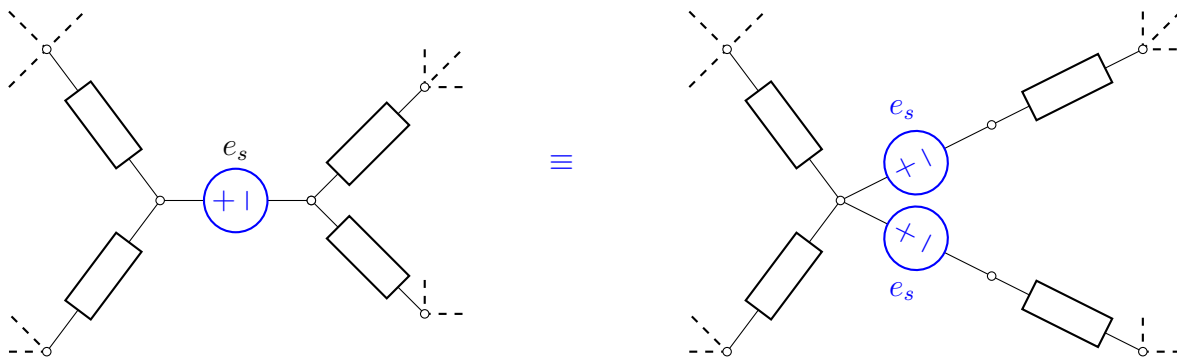


Figura 3.1: Transformación de una *fuerza de voltaje ideal* en una *fuerza de voltaje real*.

En las figuras 3.1 y 3.2 se presentan las transformaciones correspondientes para las que en una red eléctrica dada, cada fuente independiente de voltaje esté conectada en serie con un elemento



Figura 3.2: Transformación de una *fente ideal* de corriente en una *fente real* de corriente.

que no es otra fuente y cada fuente independiente de corriente esté conectada en paralelo con un elemento que no es otra fuente.

3.2.1. Rama genérica arbitraria

En general, una rama arbitraria de cualquier red eléctrica lineal e invariante en el tiempo, digamos, la rama k , tiene la forma que se muestra en la figura 3.3, donde v_{sk} representa una fuente independiente de voltaje, j_{sk} una fuente independiente de corriente, y el rectángulo una admitancia y_k .

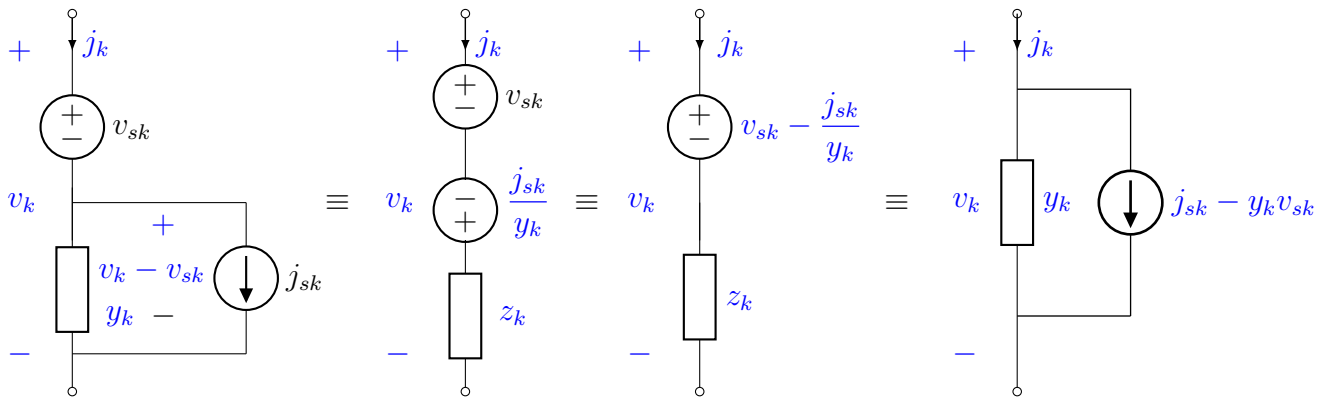


Figura 3.3: Forma general de una rama arbitraria de una red eléctrica.

Si v_k y j_k representan el voltaje y la corriente eléctrica de la rama k , respectivamente; la ecuación de la rama es

$$j_k = y_k v_k + j_{sk} - y_k v_{sk} \quad (3.1)$$

En la figura 3.4, se presenta otra forma general de una rama arbitraria de una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo, por supuesto es equivalente a la que aparece en al figura ???. La ecuación que relaciona las variables eléctricas que en ella aparecen es

$$v_k = z_k j_k + v_{sk} - z_k j_{sk} \quad (3.2)$$

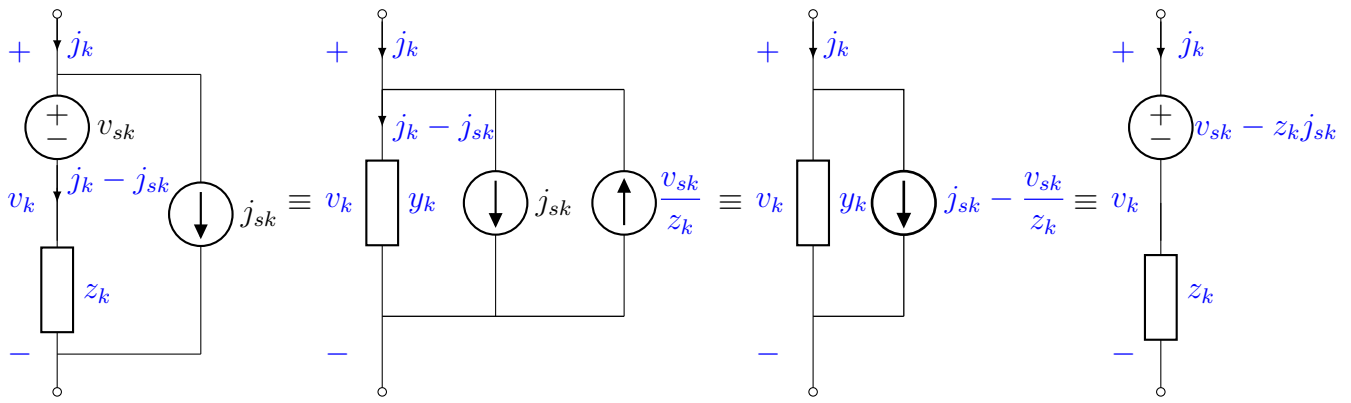


Figura 3.4: Forma general de una rama arbitraria de una red eléctrica.

3.2.2. Gráfica asociada de una red eléctrica y sus propiedades

A continuación, se presentan definiciones y propiedades de las gráficas en general y que son de gran utilidad en el estudio y análisis de las redes eléctricas que se estudian.

Definición de gráfica: una *gráfica* es un conjunto de nodos y ramas, que satisfacen la condición de que cada rama debe estar conectada a un nodo en cada extremo. En la figura 3.5 se muestran ejemplos de redes eléctricas y sus gráficas asociadas.

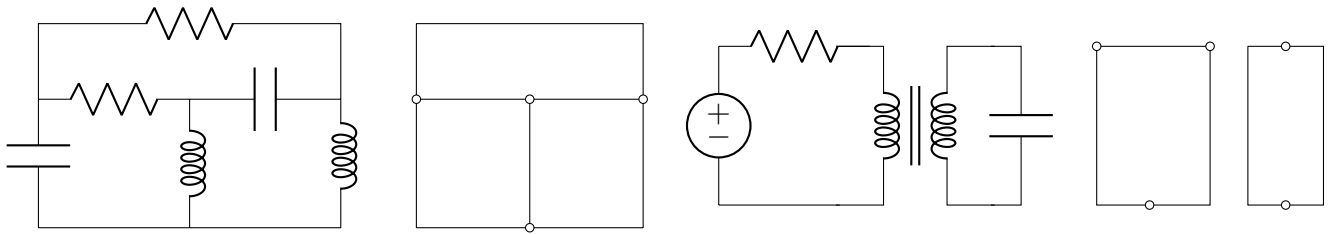


Figura 3.5: Redes eléctricas y sus gráficas asociadas.

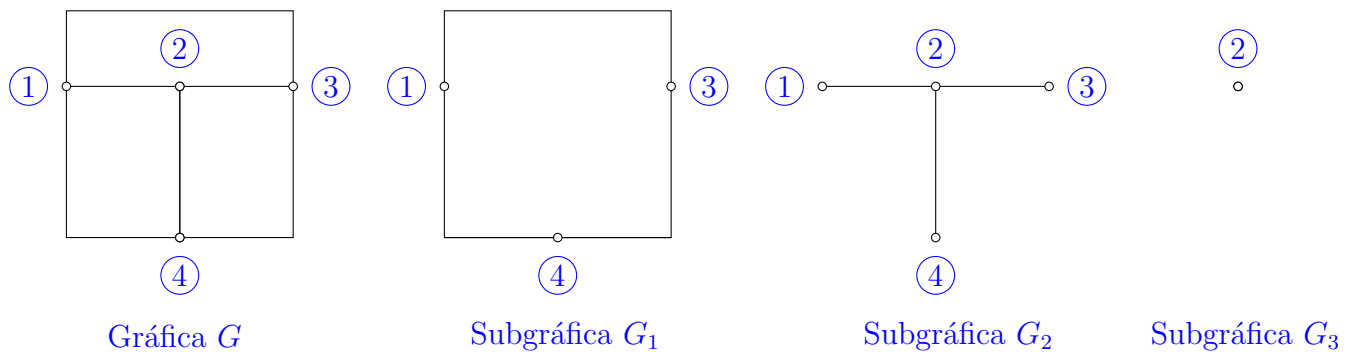


Figura 3.6: Gráfica G y subgráficas de G .

Se dice que una gráfica G_1 es una *subgráfica* de la gráfica G , si cada nodo de G_1 es un nodo de G y cada rama de G_1 es una rama de G . La figura 3.6 muestra una gráfica G y subgráficas de ella.

La subgráfica G_3 recibe el nombre de subgráfica *degenerada*.

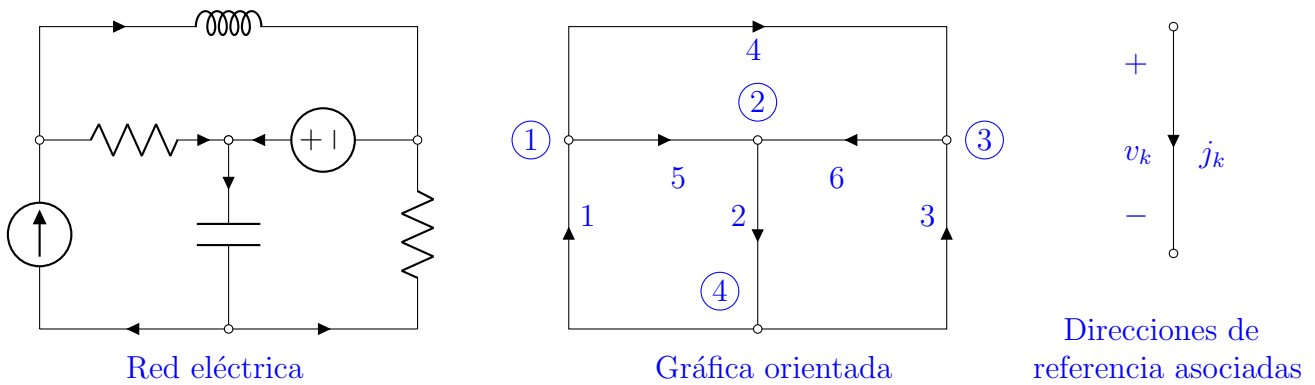


Figura 3.7: Red eléctrica y su gráfica asociada orientada.

En la figura 3.7 se ilustra el concepto de red eléctrica y su *gráfica asociada orientada*; recuerde que se sigue la convención de direcciones de referencia asociadas.

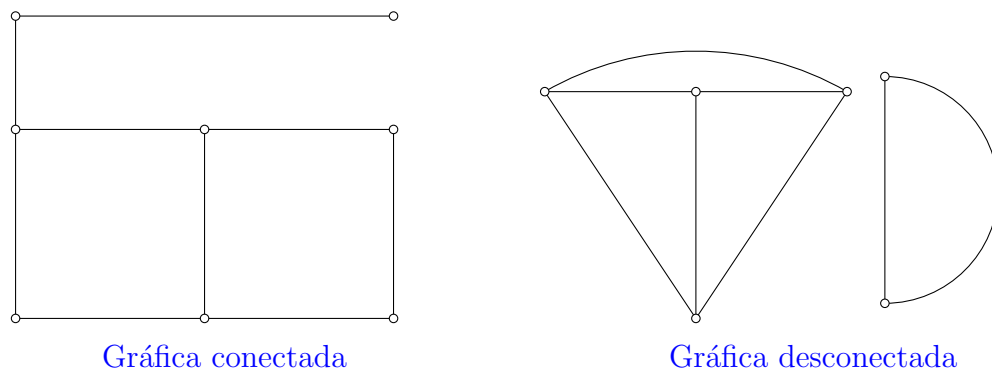


Figura 3.8: Gráfica conectada y gráfica desconectada.

Una gráfica está *conectada*, si existe por lo menos una trayectoria entre cualquier par de nodos, sin considerar la dirección de las ramas. En la figura 3.8, se muestra una gráfica conectada y una gráfica no conectada.

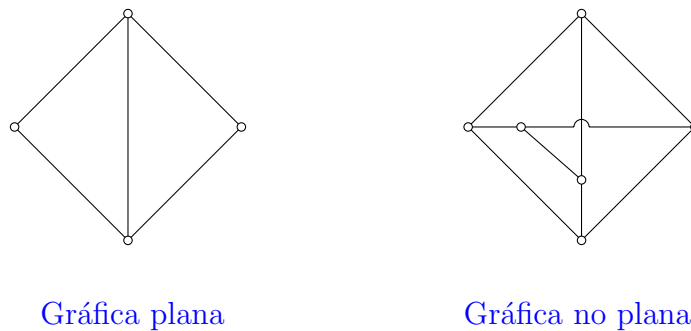


Figura 3.9: Gráfica plana y gráfica no plana.

Una gráfica es *plana* si se puede dibujar en una forma tal que dos ramas no se intersequen en un punto que no sea un nodo. En la figura 3.9 se muestran una gráfica plana y una gráfica no plana.

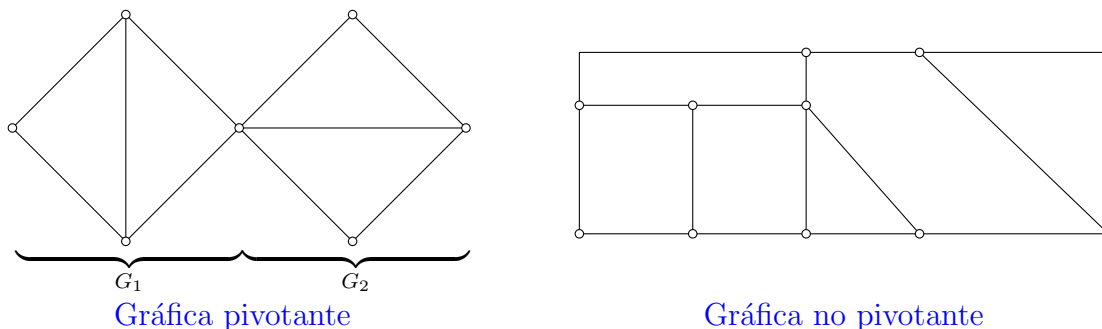


Figura 3.10: Gráfica pivotante y gráfica no pivotante.

Una gráfica *pivotante* es aquella que se puede dividir en dos subgráficas (no degeneradas) unidas por un solo nodo. En la figura 3.10 se muestra una gráfica pivotante y una que no lo es.

3.3. Matriz de incidencia, matriz de mallas y las leyes de Kirchhoff

Sea una gráfica orientada integrada por b ramas y n_t nodos. Si los nodos y las ramas de esta gráfica se numeran arbitrariamente, se denomina *matriz de incidencia* $[A]_a$ a la matriz de n_t renglones y b columnas cuyos elementos a_{ik} se definen como

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si la rama } k \text{ sale del nodo } i \\ -1 & \text{si la rama } k \text{ entra al nodo } i \\ 0 & \text{si la rama } k \text{ no conecta con el nodo } i \end{cases}$$

Ejemplo 3.1 Considere la gráfica asociada orientada de una red eléctrica arbitraria

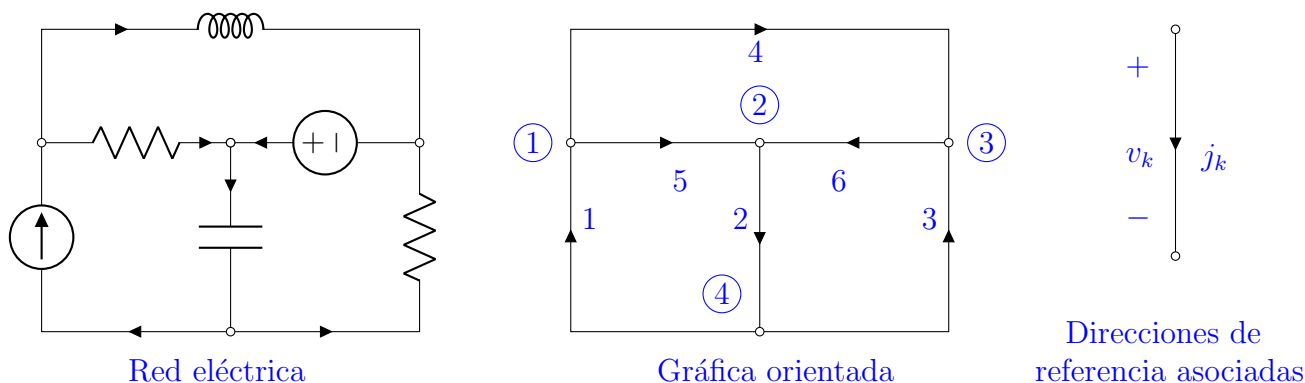


Figura 3.11: Gráfica asociada orientada y su matriz de incidencia ampliada.

La matriz de incidencia de la red eléctrica de la figura 3.11 es

$$[A]_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Igualmente, se define el *vector de corriente de rama* $J]$ al vector columna cuyo k -ésimo elemento es la corriente eléctrica j_k de la rama k . Pudiéndose afirmar que

$$[A]_a J] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que no todas las ecuaciones de corriente que se pueden establecer son linealmente independientes, entonces

$$[A]J] = 0] \quad \text{Ley de corrientes de Kirchhoff} \quad (3.3)$$

donde $[A]$ es la matriz de incidencia reducida. La ecuación (3.3) constituye un conjunto de $n = n_t - 1$ ecuaciones *linealmente independientes* en las variable j_1, j_2, \dots, j_b , es decir que la matriz $[A]$ es una matriz de rango completo.

A continuación, se define el *vector de tensiones de nodo* $E]$ al vector columna cuyo n -ésimo elemento represente el voltaje del nodo n con respecto al nodo de referencia. Se puede aserir que

$$[A]^T E] = V] \quad (3.4)$$

donde $V]$ es el *vector de tensiones de rama*, cuyo k -ésimo elemento constituye el voltaje de la k -ésima rama.

En otro orden de ideas, se define una *malla* como un conjunto de ramas que forman una trayectoria cerrada sin contener ninguna rama en el interior de dicha trayectoria. Además, una malla externa es un conjunto de ramas que forman una trayectoria cerrada sin quedar ninguna rama en el exterior de tal trayectoria.

Una gráfica no pivotante, plana, conectada y orientada de b ramas y n_t nodos tiene un número de mallas igual a $l = b - n_t + 1$; donde b indica el número de ramas y n_t el número total de nodos.

Considere una gráfica no pivotante, plana, conectada y orientada de b ramas y n_t nodos. Se asigna por convención la siguiente dirección de referencia para las trayectorias cerradas: una dirección en sentido de las manecillas del reloj para las mallas y una dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj para la malla externa.

Si las mallas se numeran arbitrariamente, se define a la matriz de mallas $[M]_a$ a la matriz de m renglones (donde m es el número de mallas incluyendo la malla externa) y b columnas cuyos elementos m_{ik} se definen como

$$m_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si la rama } k \text{ pertenece a la malla } i \text{ y coinciden en su sentido de referencia.} \\ -1 & \text{si la rama } k \text{ pertenece a la malla } i \text{ y no coinciden en su sentido de referencia.} \\ 0 & \text{si la rama } k \text{ no pertenece a la malla } i \end{cases}$$

Ejemplo 3.2 Sea la gráfica orientada, de un circuito arbitrario, que se exhibe en la figura ??.

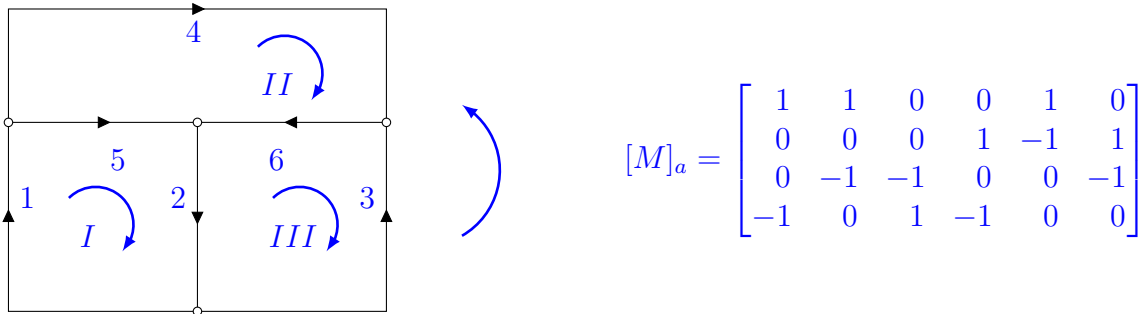


Figura 3.12: Gráfica asociada orientada y su matriz de mallas ampliada.

Si se multiplica la matriz de mallas $[M]_a$ por el vector de tensiones de rama V se tienen m ecuaciones linealmente dependientes, es decir

$$[M]_a V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 + v_5 \\ v_4 - v_5 + v_6 \\ -v_2 - v_3 - v_6 \\ -v_1 + v_3 - v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que si se suprime el último renglón de la matriz, entonces

$$[M]V = 0 \quad \text{Ley de voltajes de Kirchhoff} \quad (3.5)$$

constituye un conjunto de $l = b - n_t + 1$ ecuaciones linealmente independientes.

Se define el *vector de corrientes de malla* I al vector columna cuyo m -ésimo elemento representa la corriente eléctrica de la m -ésima malla. Se puede aserir que

$$[M]^T I = J \quad (3.6)$$

3.4. Análisis por el método de nodos de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo

Se demostró que una rama común de una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo que tiene las formas mostradas en las figuras 3.3 y 3.4, satisface la ecuación (3.1)

$$j_k = y_k v_k + j_{sk} - y_k v_{sk}$$

si se consideran las b ramas de la red eléctrica, se tiene la siguiente ecuación matricial

$$J]_k = [Y]_k V]_k + J]_{sk} - [Y]_k V]_{sk} \quad (3.7)$$

donde $[Y]_k$ recibe el nombre de *matriz de admitancias de rama*, es una matriz diagonal (si no hay componentes eléctricos acoplados en la red eléctrica) cuyos elementos son las admitancias de cada una de las ramas que constituyen a la red eléctrica, esto es

$$[Y]_k = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & y_b \end{bmatrix}$$

$J]_{sk}$ y $V]_{sk}$ son los vectores cuyos elementos son las fuentes independientes de corriente y de voltaje, respectivamente

$$J]_{sk} = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} \quad V]_{sk} = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix}$$

La expresión matricial (3.7) consta de b ecuaciones que involucran $2b$ incógnitas, por tanto es necesario efectuar algunas operaciones matriciales elementales para encontrar su solución.

Premultiplicando la ecuación (3.7) por la matriz de incidencia $[A]$ y teniendo presente la ecuación (3.3)

$$[A]J]_k = 0 = [A][Y]_k V]_k + [A]J]_{sk} - [A][Y]_k V]_{sk}$$

considerando la ecuación (3.4), $[A]^T E] = V]$

$$[A][Y]_k [A]^T E]_n = [A][Y]_k V]_{sk} - [A]J]_{sk}$$

si

$$[Y]_n \triangleq [A][Y]_k [A]^T \quad \text{Matriz de admitancias de nodo} \quad (3.8)$$

$$[I]_s \triangleq [A][Y]_k V]_{sk} - [A]J]_{sk} \quad \text{Vector de fuentes nodales de corriente} \quad (3.9)$$

$$[Y]_n E]_n = [I]_s \quad \text{Ecuación de nodos} \quad (3.10)$$

Ejemplo 3.3 Sea el circuito eléctrico que se muestra en la figura 3.13. Encuentre por medio del análisis de nodos las corrientes eléctricas y los voltajes de rama.

Procedimiento:

1. Se elige un nodo de referencia y se enumeran los nodos restantes.

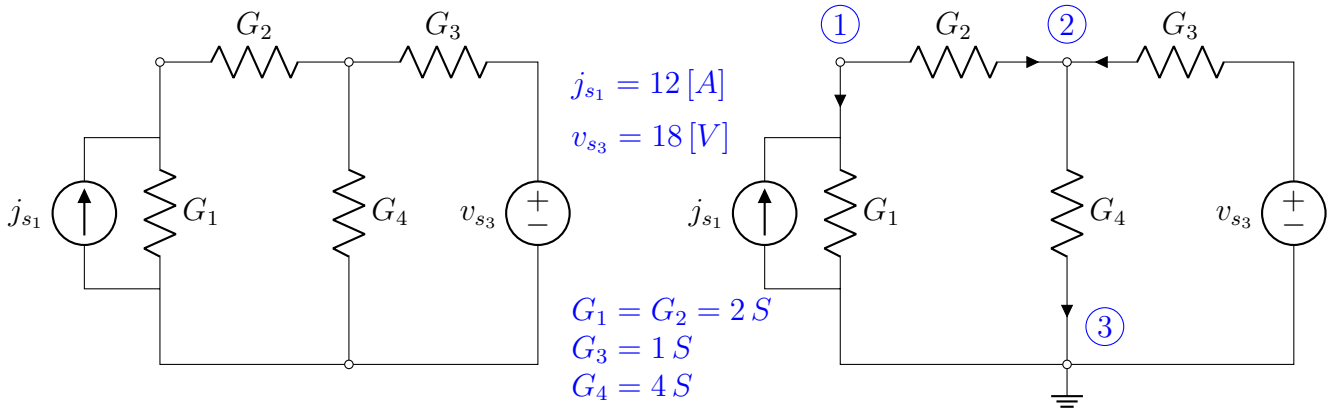


Figura 3.13: Circuito resistivo con fuentes independientes.

2. Se enumeran las ramas y se les asigna una dirección de referencia.
3. Se escriben las ecuaciones de rama de la forma dada por la ecuación (3.1).

$$\begin{aligned}
 j_1 &= G_1 v_1 - j_{s1} \\
 j_2 &= G_2 v_2 \\
 j_3 &= G_3 v_3 + G_3 v_{s3} \\
 j_4 &= G_4 v_4
 \end{aligned}$$

4. Las ecuaciones anteriores se escriben en forma matricial, de acuerdo a la ecuación (3.7).

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -j_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_{s3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

5. Se determina la matriz de incidencia $[A]$.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Se premultiplica la ecuación (3.11) por la matriz de incidencia $[A]$ y se realiza la sustitución $V] = [A]^T E]$.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} [Y]_k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} -j_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - [Y]_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_{s3} \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

Ecuación que tiene la forma

$$0] = [Y]_n \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} - I]_s$$

7. El resultado que se tiene al llevar a cabo las operaciones correspondientes es

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_3 v_{s3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -j_{s1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ G_3 v_{s3} \end{bmatrix}$$

8. Se sustituyen los valores

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

se resuelve para el vector de tensiones de nodo

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

9. Con la ecuación (3.4), se calculan los voltajes de rama.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = [A]^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

10. Finalmente, con la ecuación (3.11), se encuentran las corrientes de rama

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -4 \\ 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -18 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

3.5. Fuentes controladas o dependientes

Existe otro tipo de fuente llamada *fente controlada* o *fente dependiente*. Este tipo de fuente se dedica para modelizar ciertos dispositivos electrónicos. Por definición, una fuente controlada es un elemento que consta de dos ramas; la rama 1 puede ser un circuito abierto o un circuito cerrado y la rama 2 puede ser una fuente de voltaje o una fuente de corriente. La forma de onda de la fuente en la rama 2 es una función del voltaje de circuito abierto en la rama 1 o una función de la corriente eléctrica de corto circuito de la rama 1. En otras palabras, la fuente de la rama 2 está controlada por un voltaje o una corriente eléctrica de la rama 1.

En la figura 3.14 se expone la representación de estas fuentes. En los incisos (a) y (b) las fuentes en la rama 2 son fuentes de corriente; su valor depende, respectivamente, de la corriente eléctrica en la rama 1, que está en corto circuito y del voltaje en la rama 1, que está en circuito abierto. Estas fuentes controladas son llamadas *fente de corriente controlada por corriente* y *fente de corriente controlada por voltaje*. En los incisos (c) y (d) las fuentes en la rama 2 son fuentes de voltaje; su valor depende, respectivamente, del voltaje en la rama 1, que está en circuito abierto y de la corriente eléctrica en la rama 1, que está en corto circuito. Estas fuentes controladas son

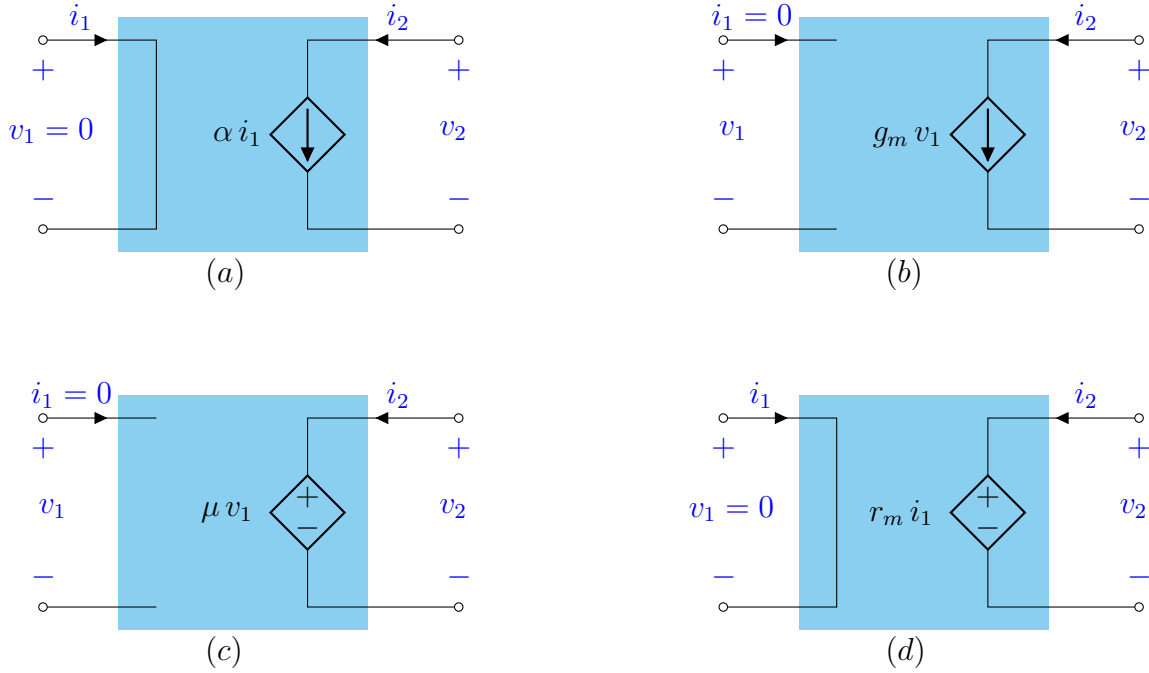


Figura 3.14: Fuentes controladas o fuentes dependientes.

llamadas *fuentes de voltaje controlada por voltaje* y *fuentes de voltaje controlada por corriente*.

Las cuatro fuentes controladas están caracterizadas por las ecuaciones que se muestran en la figura 3.14. Donde las unidades de las cuatro constantes de proporcionalidad α , g_m , μ y r_m son, respectivamente, sin dimensión, de conductancia, adimensional y de resistencia. Finalmente, debe tenerse presente que estas fuentes dependientes, así definidas, son elementos que satisfacen las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo.

3.6. Análisis en estado sinusoidal permanente

Si se considera que todas las fuentes independientes son sinusoidales de la misma frecuencia angular ω y que todos los voltajes y corrientes eléctricas han alcanzado su estado sinusoidal permanente. Para su análisis se recurre a los fasores. Así

$$\mathbf{J}_k = [Y(j\omega)]_k \mathbf{V}_k + \mathbf{J}_{sk} - [Y(j\omega)]_k \mathbf{V}_{sk}$$

realizando un procedimiento similar al que se efectuó antes, la ecuación de nodos es

$$[Y(j\omega)]_n \mathbf{E}_n = \mathbf{I}_s$$

donde la matriz de admitancias de nodo y el vector de fuentes nodales de corriente son

$$[Y(j\omega)]_n = [A][Y(j\omega)]_k [A]^T \quad e \quad \mathbf{I}_s = [A][Y(j\omega)]_k \mathbf{V}_{sk} - [A]\mathbf{J}_{sk}$$

3.6.1. Propiedades de la matriz de admitancias de nodo

1. Si la red eléctrica no tiene elementos acoplados (ni fuentes dependientes, ni inductancias mutuas)

$$\begin{aligned} [Y(j\omega)]_k & \text{ es una matriz diagonal} \\ [Y(j\omega)]_n & \text{ es una matriz simétrica} \end{aligned}$$

2. Si no hay fuentes dependientes (se permiten inductancias mutuas)

$$[Y(j\omega)]_k \quad \text{y} \quad [Y(j\omega)]_n \quad \text{son matrices simétricas}$$

3.6.2. Obtención de la ecuación de nodos por inspección

Como se ha visto, la ecuación de nodos tiene la siguiente estructura

$$\begin{bmatrix} y_{11}(j\omega) & y_{12}(j\omega) & \cdots & y_{1n}(j\omega) \\ y_{21}(j\omega) & y_{22}(j\omega) & \cdots & y_{2n}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1}(j\omega) & y_{n2}(j\omega) & \cdots & y_{nn}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ \vdots \\ i_{sn} \end{bmatrix}$$

si la red eléctrica no tiene elementos acoplados.

1. $y_{ii}(j\omega)$ es la suma de las admitancias de todas las ramas conectadas al nodo i , se denomina la autoadmitancia del nodo i .
2. $y_{ik}(j\omega)$ es el negativo de la suma de las admitancias de todas las ramas conectadas entre los nodos i y k , se denomina la admitancia mutua entre los nodos i y k .
3. Por medio del circuito eléctrico equivalente de Norton, todas las fuentes de voltaje se transforman en fuentes de corriente, entonces i_{sk} es la suma algebraica de todas las fuentes de corriente conectadas al nodo k . A las fuentes de corriente cuya dirección de referencia *entre* al nodo k se les asigna el signo positivo, a las otras se les asigna signo negativo.

Ejemplo 3.4 Encuentre las corrientes en los resistores del circuito eléctrico que se muestra en la figura 3.15.

La ecuación de nodos se obtiene por inspección

$$\begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & -1/2 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para los voltajes de nodo

$$[E]_n = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

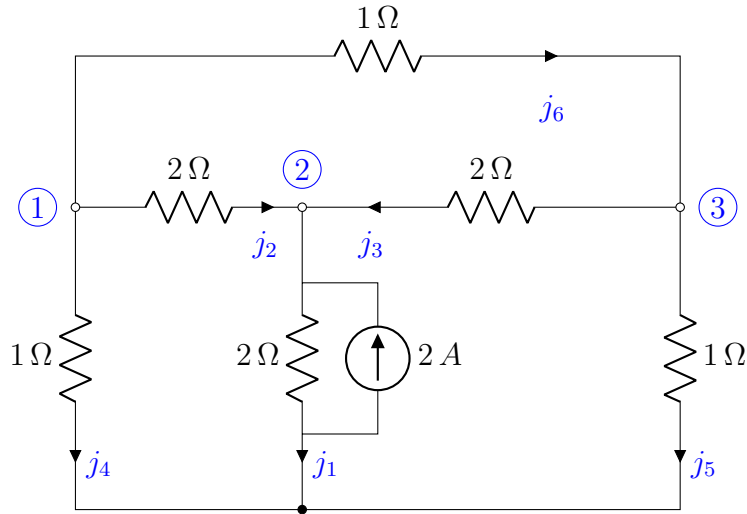


Figura 3.15: Circuito resistivo con una fuente de corriente independiente.

Dado que la matriz de incidencia es

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

los voltajes de rama son

$$[V]_k = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = [A]^T [E]_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ -8 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las corrientes de rama se determinan de la expresión

$$[J]_k = [Y]_k [V]_k + [J]_{sk} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ -8 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.7. Análisis por el método de mallas de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo

Sea η una red eléctrica con componentes lineales e invariantes en el tiempo de b ramas y n_t nodos. G su gráfica asociada conectada, plana y no pivotante. Si las fuentes sinusoidales son de la misma frecuencia angular ω , \mathbf{V}_{sk} y \mathbf{J}_{sk} son los vectores $(b \times 1)$ cuyas k -ésimas componentes representan

los fasores asociados a las fuentes sinusoidales de la k -ésima rama. De forma similar, $\mathbf{V}]_k$ y $\mathbf{J}]_k$ son los vectores ($b \times 1$) cuyas k -ésimas componentes representan los fasores asociados a v_k y j_k , respectivamente. Sea $\mathbf{I}]_m$ el vector ($l \times 1$) cuyas componentes constituyen los fasores que representan las corrientes de malla i_1, i_2, \dots, i_l .

La ecuación de las ramas en forma matricial es

$$\mathbf{V}]_k = [Z(j\omega)]_k \mathbf{J}]_k + \mathbf{V}]_{sk} - [Z(j\omega)]_k \mathbf{J}]_{sk} \quad (3.12)$$

donde $[Z(j\omega)]_k$ es una matriz cuadrada de $b \times b$, denominada *matriz de impedancias de rama* y es una matriz diagonal, si no hay elementos acoplados, es decir

$$[Z(j\omega)]_k = \begin{bmatrix} z_1(j\omega) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2(j\omega) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_b(j\omega) \end{bmatrix}$$

premultiplicando la ecuación (3.12) por la matriz de mallas $[M]$ y recordando que $[M] \mathbf{V}] = 0$ y $[M]^T \mathbf{I}] = \mathbf{J}]$, se tiene

$$[M][Z(j\omega)]_k [M]^T \mathbf{I}]_m = [M][Z(j\omega)]_k \mathbf{J}]_{sk} - [M] \mathbf{V}]_{sk}$$

si

$$[Z(j\omega)]_m \triangleq [M][Z(j\omega)]_k [M]^T \text{ Matriz de impedancias de malla} \quad (3.13)$$

donde $[Z(j\omega)]_m$ es una matriz de $(l \times l)$.

$$[\mathbf{E}]_s \triangleq [M][Z(j\omega)]_k \mathbf{J}]_{sk} - [M] \mathbf{V}]_{sk} \quad \text{Vector de fuentes de voltaje de malla} \quad (3.14)$$

y $[\mathbf{E}]_s$ es un vector de $(l \times 1)$. Finalmente

$$[Z(j\omega)]_m \mathbf{I}]_m = [\mathbf{E}]_s \quad \text{Ecuacion de mallas} \quad (3.15)$$

Ejemplo 3.5 Mediante el método de mallas, encuentre las corrientes en los resistores del circuito eléctrico que se muestra en la figura 3.16.

De la ecuación (3.12)

$$\mathbf{V}]_k = [Z]_k \mathbf{J}]_k + \mathbf{V}]_{sk} - [Z]_k \mathbf{J}]_{sk}$$

se tiene

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Premultiplicando por $[M]$ y sustituyendo $\mathbf{J}]_k = [M]^T \mathbf{I}]_m$, es posible determinar las corrientes de malla, las corrientes de rama y finalmente los voltajes de rama.

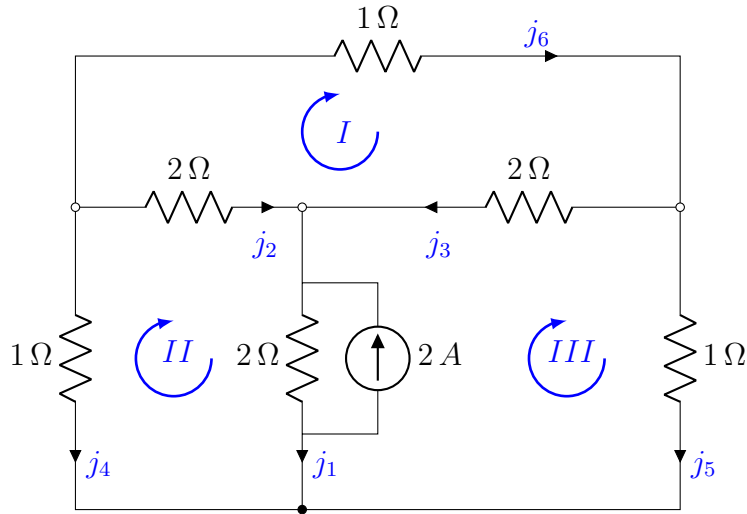


Figura 3.16: Circuito resistivo con una fuente de corriente independiente.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 21 & 14 & 14 \\ 14 & 21 & 14 \\ 14 & 14 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 0 \\ -28 \\ 28 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 0 \\ -28 \\ 28 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

finalmente

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ -8 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.7.1. Propiedades de la matriz de impedancias de malla

1. Si la red eléctrica no tiene elementos acoplados (ni fuentes dependientes, ni inductancias mutuas)

$$\begin{aligned} [Z(j\omega)]_k & \text{ es una matriz diagonal} \\ [Z(j\omega)]_m & \text{ es una matriz simétrica} \end{aligned}$$

2. Si no hay fuentes dependientes (se permiten inductancias mutuas)

$$[Z(j\omega)]_k \quad \text{y} \quad [Z(j\omega)]_m \quad \text{son matrices simétricas}$$

3.7.2. Obtención de la ecuación de mallas por inspección

La ecuación de mallas tiene la siguiente estructura

$$\begin{bmatrix} z_{11}(j\omega) & z_{12}(j\omega) & \cdots & z_{1m}(j\omega) \\ z_{21}(j\omega) & z_{22}(j\omega) & \cdots & z_{2m}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{m1}(j\omega) & z_{m2}(j\omega) & \cdots & z_{mm}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{s_1} \\ \mathbf{e}_{s_2} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{s_m} \end{bmatrix}$$

si la red eléctrica no tiene elementos acoplados.

1. $z_{ii}(j\omega)$ es la suma de las impedancias de todas las ramas en la malla i , se denomina la autoimpedancia de la malla i .
2. $z_{ik}(j\omega)$ es el negativo de la suma de las impedancias de todas las ramas que son comunes a las mallas i y k , se denomina la impedancia mutua entre las mallas i y k .
3. Por medio del circuito eléctrico equivalente de Thévenin, todas las fuentes de corriente se transforman en fuentes de voltaje, entonces \mathbf{e}_{sk} es la suma algebraica de todas las fuentes de voltaje en la malla k . A las fuentes de voltaje cuya dirección de referencia empuje a la corriente eléctrica en la dirección de referencia de la malla se le asigna el signo positivo en caso contrario signo negativo.

3.8. Método abreviado

Cuando la red eléctrica que se estudia involucra fuentes dependientes o controladas, las ecuaciones de nodos y de mallas se pueden encontrar por inspección, si se considera la siguiente idea: *tratar a las fuentes dependientes como si fuesen independientes*, y en el último paso expresar tales fuentes dependientes en términos de las variables adecuadas. Como un ejemplo de lo anterior, considere el siguiente ejercicio.

Ejemplo 3.6 Encuentre la ecuación diferencial que relaciona la corriente eléctrica $i_g(t)$ de la fuente independiente de corriente y el voltaje $v_1(t)$ del circuito eléctrico de la figura 3.17.

Considerando a *la fuente de corriente controlada por voltaje* como una fuente independiente de corriente, la ecuación de nodos, por inspección, resulta

$$\begin{bmatrix} G_1 + sC_1 + sC_2 & -sC_2 \\ -sC_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g(s) \\ -g_m V_1(s) \end{bmatrix}$$

reacomodando términos, se tiene

$$\begin{bmatrix} G_1 + s(C_1 + C_2) & -sC_2 \\ g_m - sC_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

la función de transferencia correspondiente es

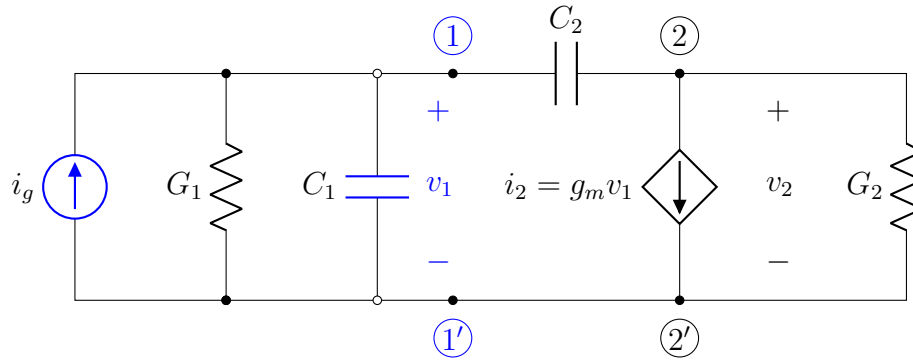


Figura 3.17: Circuito eléctrico con una fuente controlada.

$$\frac{V_1(s)}{I_g(s)} = \frac{C_2 s + G_2}{C_1 C_2 s^2 + (C_1 G_2 + C_2 (g_m + G_1 + G_2)) s + G_1 G_2}$$

$$\frac{V_1(s)}{I_g(s)} = \frac{\frac{1}{C_1} s + \frac{G_2}{C_1 C_2}}{s^2 + \left(\frac{G_2}{C_2} + \frac{g_m + G_1 + G_2}{C_1} \right) s + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}$$

a partir de la función de transferencia, la ecuación diferencial, que modeliza el circuito eléctrico, se puede deducir fácilmente

$$\frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} + \left(\frac{G_2}{C_2} + \frac{g_m + G_1 + G_2}{C_1} \right) \frac{d v_1(t)}{dt} + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2} v_1(t) = \frac{1}{C_1} \frac{d i_g(t)}{dt} + \frac{G_2}{C_1 C_2} i_g(t)$$

3.9. El amplificador operacional

El amplificador operacional se puede considerar, esencialmente, una fuente de voltaje controlada por voltaje en el que la ganancia de voltaje diferencial, A_d , es muy grande. El modelo capital del amplificador operacional se observa en la figura 3.18. Este dispositivo electrónico consta de varias terminales, pero por simplicidad, en la figura no se muestran todas.

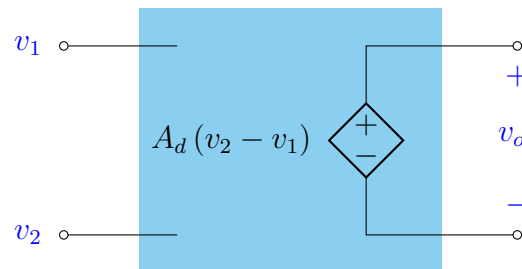


Figura 3.18: Modelo capital del Amplificador Operacional.

En la figura 3.19 se observa el símbolo para representar el amplificador operacional. La terminal ① es la terminal de entrada inversora, la ② corresponde a la terminal de entrada no inversora y

la número ③ es la terminal de la salida.

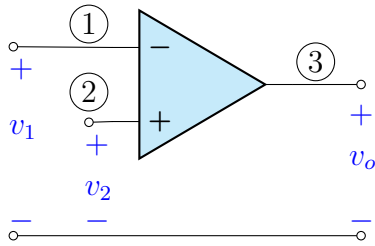


Figura 3.19: Símbolo del amplificador operacional.

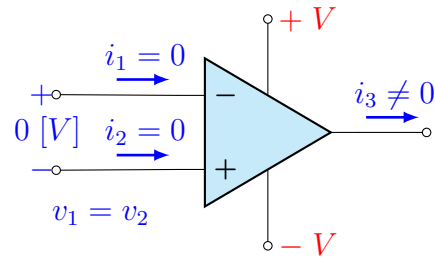


Figura 3.20: Amplificador operacional ideal con sus terminales de alimentación.

El amplificador operacional tiene características importantes que lo hacen versátil en un número ingente de aplicaciones. No obstante, nuestro estudio se enfoca únicamente al modelo del *amplificador operacional ideal* y del cual sólo se tienen en cuenta tres características. A saber: la impedancia de entrada se puede considerar *infinita* mientras que la impedancia de salida *nula*, como se puede apreciar en la figura 3.18. Si la ganancia A_d se considera *infinita*, entonces al llevar a cabo el análisis de una red eléctrica que contenga un amplificador operacional, en el par de terminales de la entrada ambos voltajes son simultáneamente idénticos, como se visualiza en la figura 3.20.

$$\begin{aligned} v_o &= A_d (v_1 - v_2) \\ \frac{v_o}{A_d} &= \frac{v_o}{\infty} = 0 = v_1 - v_2 \\ \implies v_1 &= v_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para clarificar estas ideas, considere el circuito eléctrico de la figura 3.21, del cual se desea encontrar la relación entre el voltaje de salida $V_o(s)$ y el voltaje de entrada $V_i(s)$, esto es, la función de transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

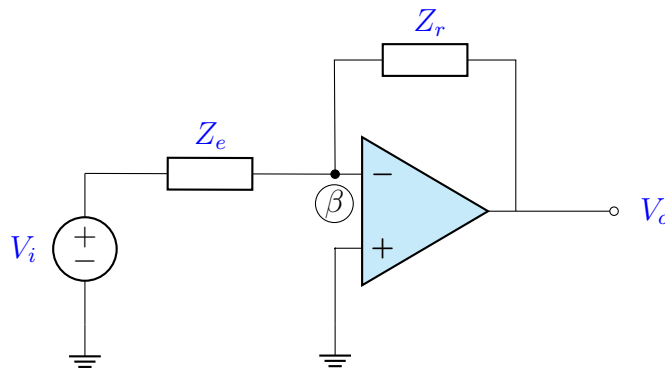


Figura 3.21: Amplificador operacional con retroalimentación negativa.

A partir del análisis por nodos y después de que se ha transformado la fuente de voltaje independiente V_i en una fuente de corriente independiente, la ecuación de nodos resulta

$$\left(\frac{1}{Z_e} + \frac{1}{Z_r} + \frac{1}{\infty} \right) V_\beta(s) - \frac{V_o(s)}{Z_r} = \frac{V_i(s)}{Z_e}$$

Pero dado que $V_\beta(s) = 0$, ¿por qué?, se tiene

$$-\frac{V_o(s)}{Z_r} = \frac{V_i(s)}{Z_e}$$

así

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_r(s)}{Z_e(s)} \quad (3.17)$$

es la relación entre los voltajes de la salida y de la entrada que se busca.

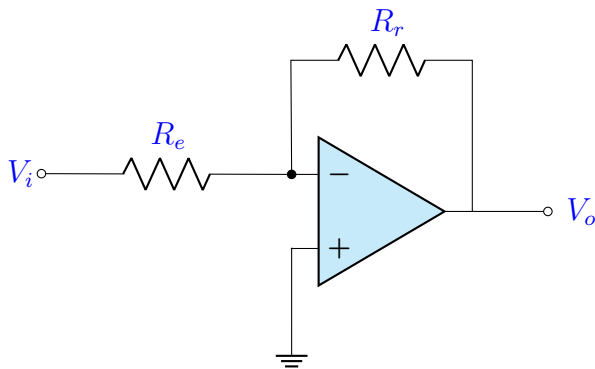


Figura 3.22: Amplificador de voltaje inversor de ganancia finita.

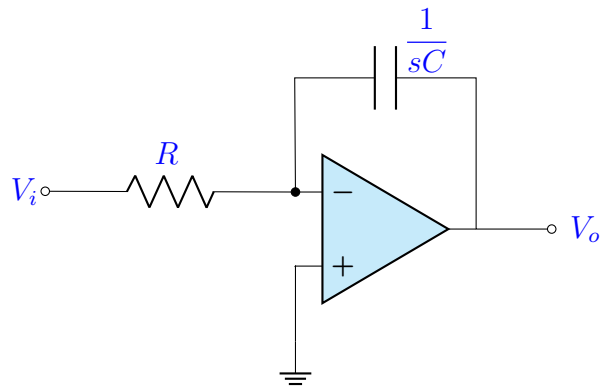


Figura 3.23: Integrador.

Si las impedancias $Z_e(s)$ y $Z_r(s)$ se sustituyen por las resistencias R_e y R_r , respectivamente, como se muestra en la figura 3.22; se tiene el *amplificador inversor de ganancia finita*. Su relación entrada-salida es

$$v_o(t) = -\frac{R_r}{R_e} v_i(t) \quad (3.18)$$

Asimismo, para el circuito eléctrico de la figura 3.23, es asequible demostrar que la relación entrada-salida resulta

$$v_o(t) = -\frac{1}{CR} \int_0^t v_i(\tau) d\tau + v_o(0) \quad (3.19)$$

Los resultados anteriores se pueden generalizar, al considerar el teorema de superposición. De manera que la señal en la terminal de la salida del amplificador operacional de la figura 3.24 es

$$v_o(t) = -\left[\frac{R_r}{R_1} v_1(t) + \frac{R_r}{R_2} v_2(t) + \frac{R_r}{R_3} v_3(t) \right]$$

y la correspondiente al amplificador operacional de la figura 3.25, resulta

$$v_o(t) = -\left[\frac{1}{CR_1} \int_0^t v_1(\tau) d\tau + \frac{1}{CR_2} \int_0^t v_2(\tau) d\tau + \frac{1}{CR_3} \int_0^t v_3(\tau) d\tau \right] + v_o(0)$$

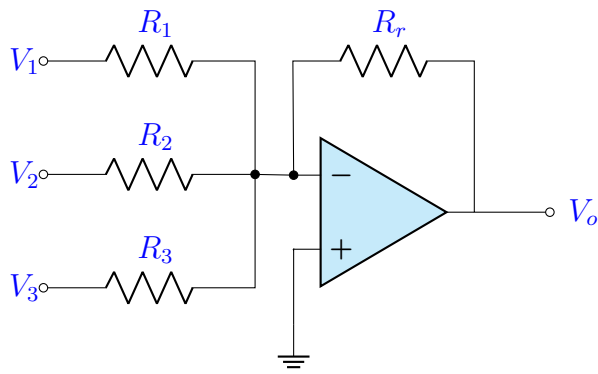


Figura 3.24: Sumador.

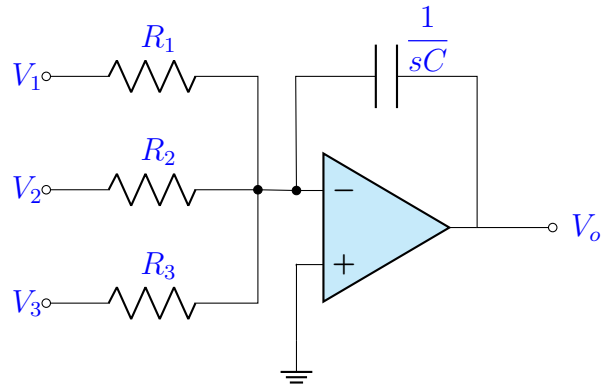


Figura 3.25: Integrador.

Finalmente, se encuentra la relación entrada-salida de los circuitos eléctricos de la figura 3.26.

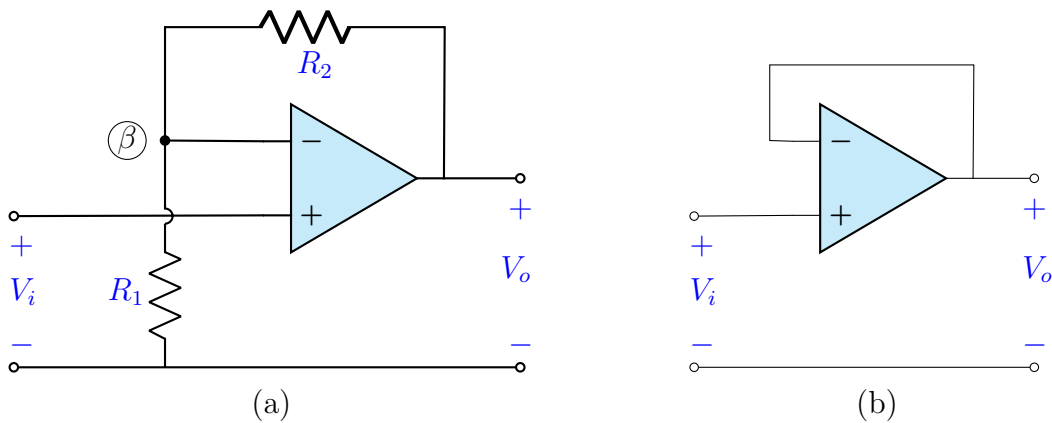


Figura 3.26: (a) Amplificador de voltaje no inversor de ganancia finita. (b) Seguidor de voltaje.

En el circuito eléctrico de la figura 3.26a, en primer lugar, se debe notar que

$$v_{\beta}(t) = v_i(t)$$

y que la ecuación de nodos para el nodo β es

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\infty}\right)v_{\beta}(t) - \left(\frac{1}{R_2}\right)v_o(t) = 0$$

con las dos ecuaciones anteriores y álgebra elemental, se tiene

$$v_o(t) = \frac{R_1 + R_2}{R_1}v_i(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_i(t) \quad (3.20)$$

Este circuito eléctrico se denomina *amplificador de voltaje no inversor de ganancia finita*.

El circuito eléctrico de la figura 3.26b es un caso particular del que se muestra en la figura 3.26a; si se considera que $R_1 = \infty$ (*circuito abierto*) y $R_2 = 0$ (*corto circuito*). Por lo que la relación entrada-salida, a partir de la ecuación 3.20, resulta ser

$$v_o(t) = v_i(t) \quad (3.21)$$

este circuito eléctrico recibe el nombre de *seguidor de voltaje*. También se conoce como *amplificador de aislamiento* (buffer amplifier) pues separa o aísla a un circuito eléctrico de otro.

Ejemplo 3.7 Encuentre la función de transferencia del circuito eléctrico que se muestra en la figura 3.27a.

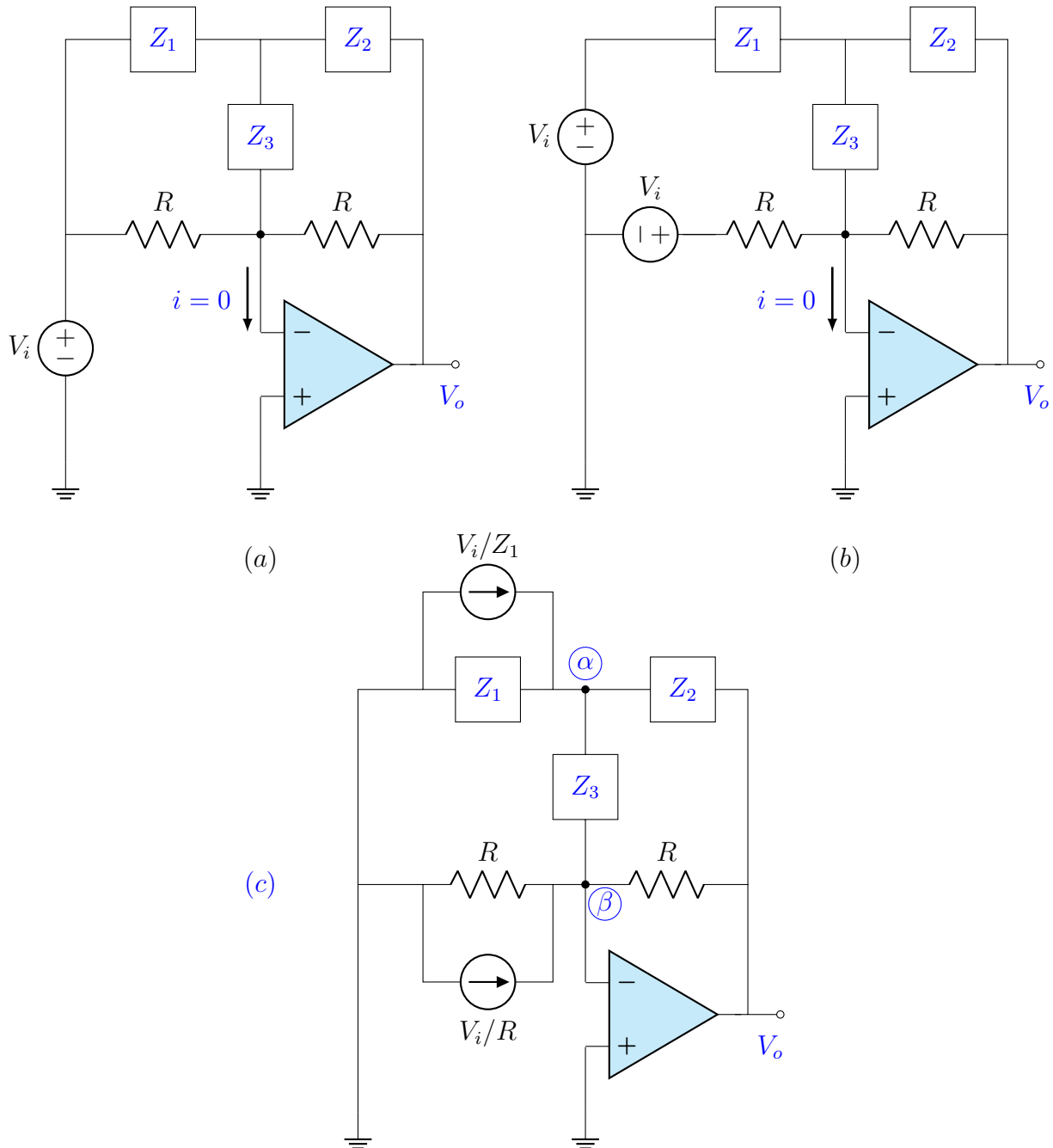


Figura 3.27: Etapa básica de un ecualizador.

Una forma de obtener la función de transferencia del circuito eléctrico, es mediante el análisis por el método de nodos. Sin embargo, para poder emplear tal procedimiento, se requiere que las fuentes independientes de corriente y de voltaje sean fuentes independientes reales. Así pues, la fuente de voltaje ideal V_i se convierte en una fuente de voltaje real desplazándola como se muestra en la figura 3.27b.

A continuación, se obtiene la ecuación de nodos por inspección, por lo que es necesario transformar las fuentes de voltaje independientes en fuentes de corriente independientes, empleando el circuito eléctrico equivalente de Norton. El resultado de lo anterior se observa a la figura 3.27c.

Teniendo presente que el voltaje del nodo $\textcircled{\beta}$, es cero (*tierra virtual*); la ecuación de nodos resulta:

Nodo $\textcircled{\alpha}$

$$\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) V_\alpha - \frac{1}{Z_2} V_o = \frac{1}{Z_1} V_i \quad (3.22)$$

Nodo $\textcircled{\beta}$

$$-\frac{1}{Z_3} V_\alpha - \frac{1}{R} V_o = \frac{1}{R} V_i \quad (3.23)$$

de la ecuación (3.23)

$$V_\alpha = -\frac{Z_3}{R}(V_i + V_o)$$

en la ecuación (3.22)

$$-\frac{\Delta}{Z_1 Z_2 Z_3} \frac{Z_3}{R} (V_i + V_o) - \frac{1}{Z_2} V_o = \frac{1}{Z_1} V_i \quad (3.24)$$

donde

$$\Delta = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$$

agrupando términos, finalmente, la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{\frac{Z_2}{\Delta} + \frac{1}{R}}{\frac{Z_1}{\Delta} + \frac{1}{R}}$$

3.10. Escalamiento de impedancia y de frecuencia

Estos dos teoremas, son de gran trascendencia ya que su utilidad y empleo permite la realización de *sistemas, filtros o ecualizadores* con valores de resistores, inductores y capacitores comerciales a partir de tablas normalizadas.

3.10.1. Escalamiento de impedancia

Considere una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo de parámetros concentrados constituida por elementos lineales e invariantes en el tiempo, cuya entrada es la fuente de voltaje independiente $v_s(t)$ y la salida es el voltaje $v_o(t)$, correspondiente a una rama arbitraria de la misma red, su gráfica asociada se observa en la figura 3.28.

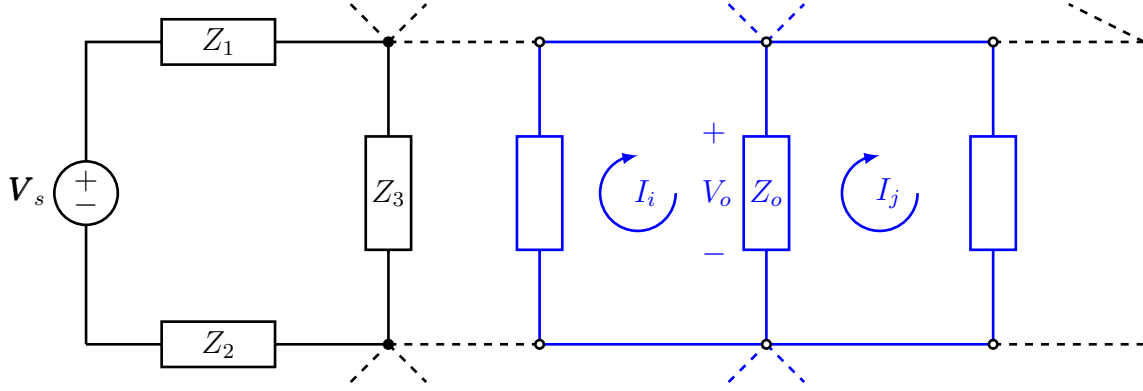


Figura 3.28: Red eléctrica plana con elementos lineales e invariantes en el tiempo.

El fasor de voltaje \mathbf{V}_o de la rama eléctrica con impedancia $Z_o(j\omega)$, está dado por

$$\mathbf{V}_o = Z_o(j\omega) (\mathbf{I}_i - \mathbf{I}_j) \quad (3.25)$$

Por otra parte, la ecuación de mallas de la red eléctrica es

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(j\omega) & Z_{12}(j\omega) & \cdots & Z_{1m}(j\omega) \\ Z_{21}(j\omega) & Z_{22}(j\omega) & \cdots & Z_{2m}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{m1}(j\omega) & Z_{m2}(j\omega) & \cdots & Z_{mm}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

resolviendo para los fasores \mathbf{I}_i e \mathbf{I}_j

$$\mathbf{I}_i = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(i-1)} & \mathbf{V}_s & Z_{1(i+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(i-1)} & 0 & Z_{m(i+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{I}_j = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(j-1)} & \mathbf{V}_s & Z_{1(j+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & 0 & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}} \quad (3.28)$$

Si se define

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (3.29)$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(i-1)} & Z_{2(i+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(i-1)} & Z_{m(i+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (3.30)$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(j-1)} & Z_{2(j+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (3.31)$$

Considerando las ecuaciones (3.25), (3.26), (3.27), (3.28), (3.29), (3.30) y (3.31) se tiene

$$\mathbf{V}_o = Z_o(j\omega) \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} \mathbf{V}_s \quad (3.32)$$

por lo que la función de transferencia resulta

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = Z_o(j\omega) \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} \quad (3.33)$$

Si todas las impedancias que constituyen la red eléctrica se multiplican por un factor k, de la ecuación (3.33), se tiene

$$\frac{\mathbf{V}'_o}{\mathbf{V}_s} = kZ_o(j\omega) \frac{(\Delta'_i - \Delta'_j)}{\Delta'} \quad (3.34)$$

donde por álgebra de determinantes

$$\begin{aligned} \Delta'_i &= k^{m-1} \Delta_i \\ \Delta'_j &= k^{m-1} \Delta_j \\ \Delta' &= k^m \Delta \end{aligned} \quad (3.35)$$

sustituyendo la ecuación (3.35) en la ecuación (3.34)

$$\frac{\mathbf{V}'_o}{\mathbf{V}_s} = kZ_o(j\omega) \frac{k^{m-1} (\Delta_i - \Delta_j)}{k^m \Delta} = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} \quad (3.36)$$

de la expresión anterior se concluye lo siguiente:

Si en una red eléctrica lineal se multiplican todas las impedancias por una misma constante arbitraria, k, la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

En función de los elementos que conforman la red eléctrica: Si en una red eléctrica todas las resistencias e inductancias que la constituyen se multiplican por una constante arbitraria k y las

capacitancias de la misma red se dividen por la constante arbitraria k , la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

3.10.2. Escalamiento de frecuencia

La respuesta de estado sinusoidal permanente de un sistema lineal, invariante en el tiempo y estable debida a una entrada de la forma $x(t) = \text{sen}(\omega t)$ está dada por

$$y(t) = |H(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \angle H(j\omega)) \quad (3.37)$$

donde $H(j\omega)$ es la función de transferencia de la red eléctrica, $H(s)$, evaluada en el eje imaginario del plano complejo, es decir

$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$$

En una red eléctrica dada de b ramas, la función de transferencia depende de la frecuencia angular y de los valores de los componentes eléctricos que la conforman, esto es

$$H(j\omega) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega L_1, \dots, j\omega L_b, j\omega C_1, \dots, j\omega C_b)$$

Para una frecuencia angular ω_1 , se tiene

$$H(j\omega_1) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega_1 L_1, \dots, j\omega_1 L_b, j\omega_1 C_1, \dots, j\omega_1 C_b) \quad (3.38)$$

Para una frecuencia angular ω_2 y suponiendo que las inductancias y las capacitancias de cada rama de la red eléctrica se pueden modificar

$$H(j\omega_2) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega_2 L'_1, \dots, j\omega_2 L'_b, j\omega_2 C'_1, \dots, j\omega_2 C'_b) \quad (3.39)$$

Si se desea que las respuestas en frecuencia, dadas por las ecuaciones (3.38) y (3.39), presenten las mismas características, de magnitud y fase, se requiere

$$\omega_1 L_n = \omega_2 L'_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b$$

y

$$\omega_1 C_n = \omega_2 C'_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b$$

por consiguiente, los nuevos valores de los elementos inductivos y capacitivos para que se cumpla lo dicho en el párrafo anterior son

$$L'_n = \frac{\omega_1}{\omega_2} L_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b \quad (3.40)$$

$$C'_n = \frac{\omega_1}{\omega_2} C_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b \quad (3.41)$$

por lo que se infiere: si se desea que la respuesta sinusoidal permanente de una red eléctrica a una cierta frecuencia angular ω_2 presente las mismas características de magnitud y fase que se tienen para una frecuencia ω_1 , los inductores y los capacitores que constituyen la red eléctrica deben modificarse de acuerdo a las ecuaciones (3.40) y (3.41).

Ejemplo 3.8 Determine R_1 y R_2 para que el circuito eléctrico de la figura 3.29 sea un filtro pasa bajas de primer orden $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$, con $\omega_c = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y una ganancia de 3. Escale el resultado para tener $\omega_c = 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ empleando un capacitor de $1 \mu\text{F}$.

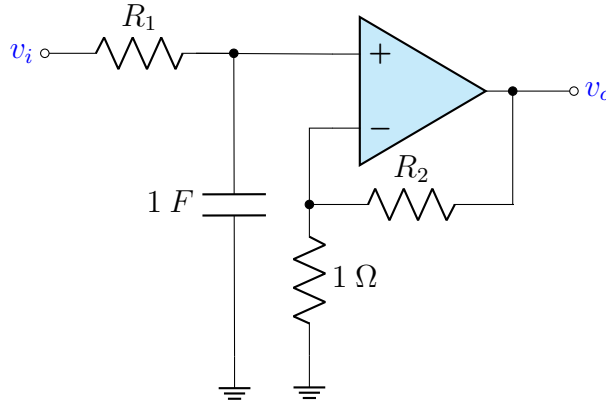


Figura 3.29: Filtro eléctrico pasa bajas normalizado.

En la figura 3.30, se vuelve a trazar el filtro eléctrico para encontrar la solución deseada a partir del análisis por el método de nodos, esto es

$$\begin{aligned} \text{Primero} & \quad V_\alpha - V_\beta = 0 \\ \text{Del nodo } \textcircled{\alpha} & \quad \left[\frac{1}{R_1} + sC \right] V_\alpha = \frac{V_i}{R_1} \\ \text{Del nodo } \textcircled{\beta} & \quad \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right] V_\beta - \left[\frac{1}{R_2} \right] V_o = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para $V_o(s)$ en función de $V_i(s)$, resulta

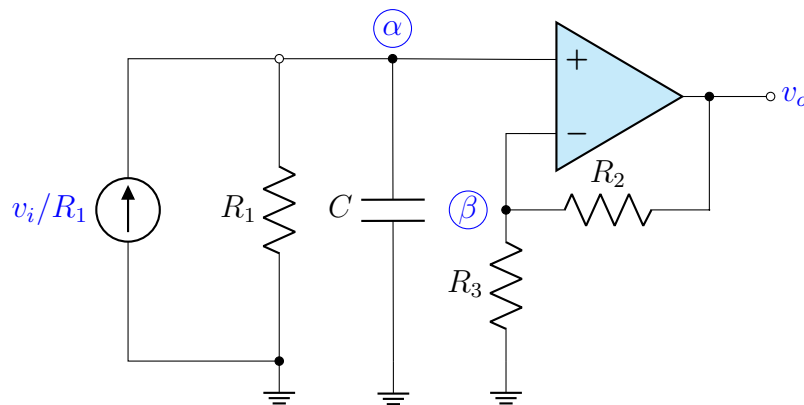


Figura 3.30: Filtro eléctrico Butterworth pasa bajas normalizado.

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) \frac{1}{sCR_1 + 1} \quad (3.42)$$

por tanto

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \frac{1}{1 + j\omega CR_1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR_1)^2}} \angle -\arctan(\omega CR_1) \quad (3.43)$$

así

$$\left|H(j\omega)\right|_{\omega=0} = \left(1 + \frac{R_2}{1}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (0)^2}} = 3$$

entonces

$$R_2 = 2\Omega$$

La frecuencia de corte del filtro eléctrico pasa bajas es $\omega_c = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, que en este caso corresponde al ancho de banda AB (el conjunto de frecuencias tales que la magnitud es mayor o igual al valor máximo de la magnitud entre la raíz cuadrada de 2). De las ecuaciones (2.13) y (3.43)

$$\begin{aligned} \left|H(j\omega)\right|_{\omega=1} &= \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{1 + (1 \times 1 \times R_1)^2}} \\ \implies R_1 &= 1\Omega \end{aligned}$$

A continuación se lleva a cabo el escalamiento en frecuencia. De la ecuación (3.41)

$$C_{\text{intermedia}} = \frac{\omega_{\text{inicial}}}{\omega_{\text{final}}} C_{\text{inicial}} = \frac{1}{10^5} \times 1 = 10^{-5} \text{ F}$$

Se determina la constante para realizar el escalamiento en impedancia.

$$\begin{aligned} C_{\text{final}} &= \frac{C_{\text{intermedia}}}{k} = \frac{10^{-5}}{k} = 10^{-9} \text{ F} \\ \implies k &= 10^4 \end{aligned}$$

Por tanto, los valores finales de las resistencias son

$$\begin{aligned} R_{1 \text{ final}} &= k R_{1 \text{ inicial}} = 10^4 \times 1 = 10\,000 \Omega \\ R_{2 \text{ final}} &= k R_{2 \text{ inicial}} = 10^4 \times 2 = 20\,000 \Omega \\ R_{3 \text{ final}} &= k R_{3 \text{ inicial}} = 10^4 \times 1 = 10\,000 \Omega \end{aligned}$$

En las figuras 3.31 y 3.32 se presentan las respuestas en frecuencia de los filtros eléctricos pasa bajas sin escalar y con el escalamiento requerido. ¿Qué se puede dilucidar?

3.10.3. Desnormalización de una función de transferencia

Dada una función de transferencia $H(s)$ que presenta alguna característica de interés, verbigracia: ganancia máxima, ganancia de 3 dB por debajo de la ganancia máxima, ángulo de fase, etc. para una frecuencia $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, se puede afirmar que la función de transferencia

$$G(s) = H\left(\frac{s}{\omega_n}\right) \quad (3.44)$$

presenta la misma característica de interés en $\omega = \omega_n$.

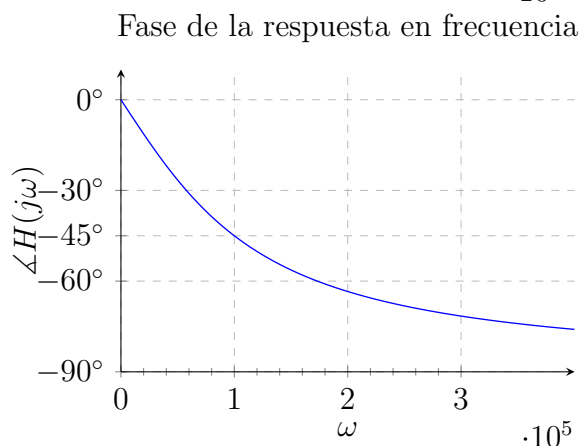
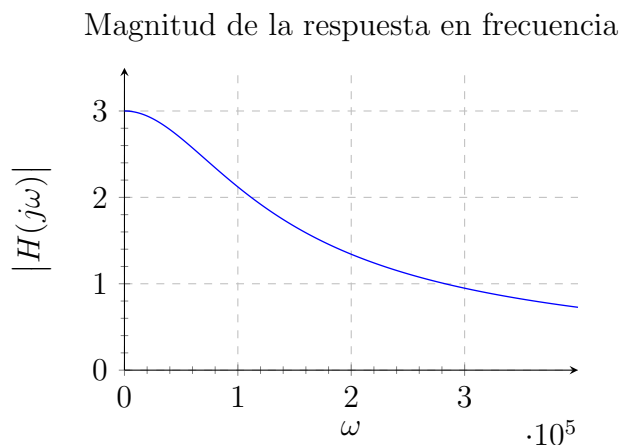
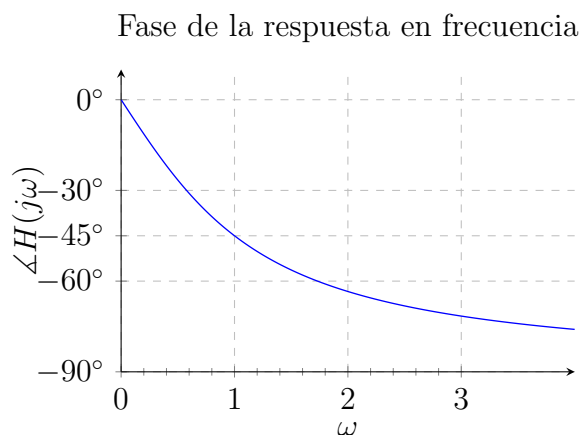
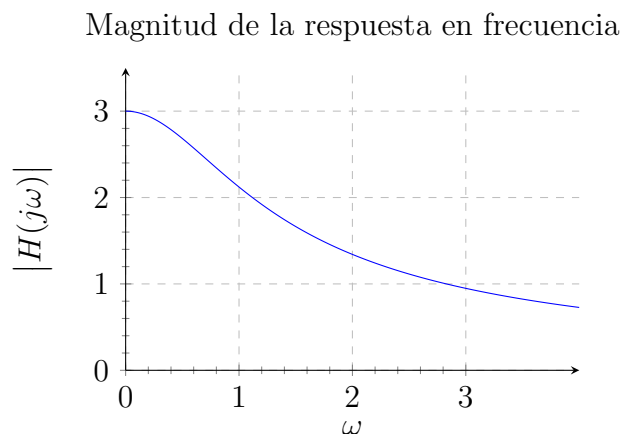


Figura 3.31: Filtro pasa bajas normalizado.

Figura 3.32: Filtro pasa bajas desnormalizado.

Ejemplo 3.9 Sea

$$H(s) = \frac{\sqrt{2}s}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

la función de transferencia de un filtro eléctrico pasa banda con frecuencia de resonancia $\omega_o = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Encuentre la función de transferencia con las mismas características, pero con una frecuencia de resonancia $\omega_o = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. De la ecuación (3.44)

$$G(s) = H\left(\frac{s}{10}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{s}{10}\right)}{\left(\frac{s}{10}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{10}\right) + 1} = \frac{10\sqrt{2}s}{s^2 + 10\sqrt{2}s + 100}$$

en la figura 3.33 se observan los resultados obtenidos.

3.11. Filtros eléctricos de ganancia infinita y realimentación múltiple

A continuación se considera el circuito eléctrico general constituido por resistores, capacitores y un amplificador operacional, a partir del cual se pueden construir filtros eléctricos pasa bajas, pasa

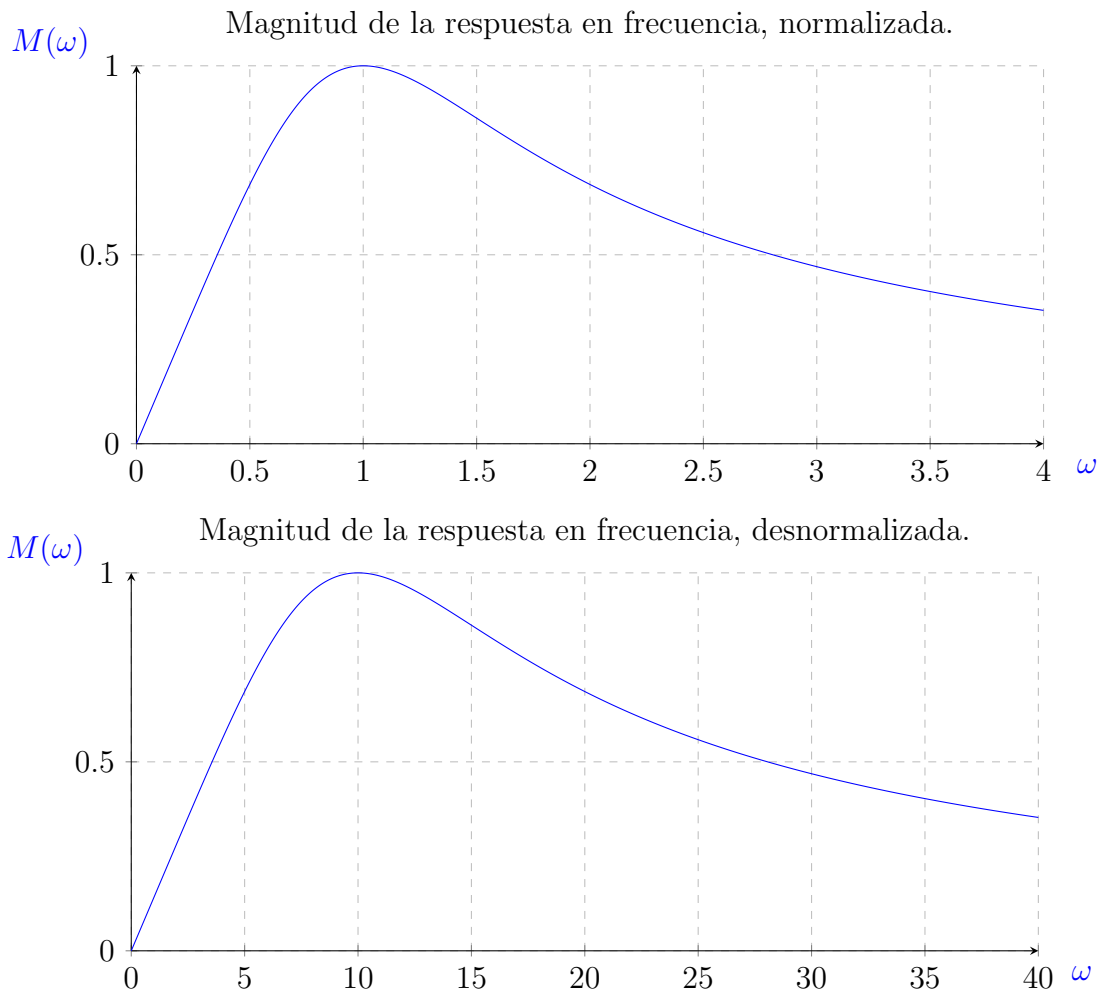


Figura 3.33: Magnitud de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia: *normalizada* y *desnormalizada*.

altas y pasa banda al seleccionarse valores adecuados de los parámetros Y o *admitancias de corto circuito*. Tal circuito eléctrico se muestra en la figura 3.34.

La relación *entrada-salida* (función de transferencia) del circuito eléctrico se puede determinar a partir de la ecuación de nodos.

Teniendo en cuenta que

$$V_{\beta} = 0$$

Para el nodo $\textcircled{\alpha}$

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)V_{\alpha} - Y_4V_o = Y_1V_i$$

Para el nodo $\textcircled{\beta}$

$$-Y_3V_{\alpha} - Y_5V_o = 0$$

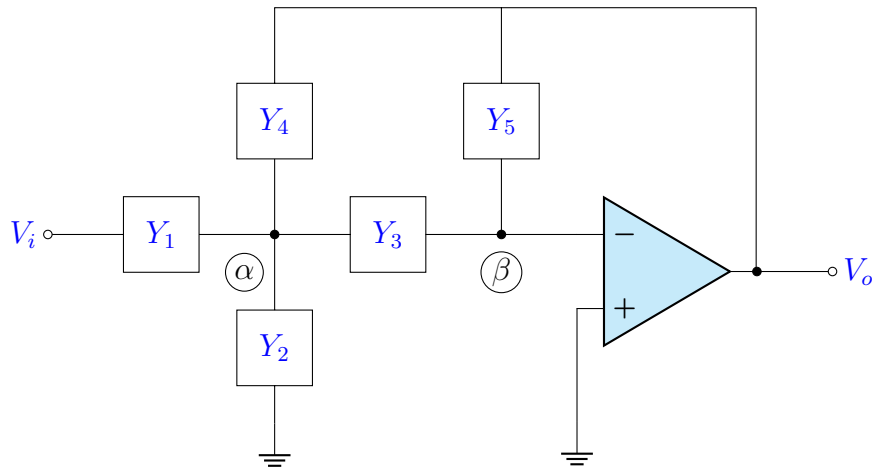


Figura 3.34: Filtro eléctrico general de segundo orden de ganancia infinita y realimentación múltiple.

de donde

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-Y_1 Y_3}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)Y_5 + Y_3 Y_4} \quad (3.45)$$

3.12. Filtros eléctricos con fuente de voltaje controlada por voltaje

Otra configuración general para la construcción de filtros eléctricos pasa bajas y filtros eléctricos pasa altas se muestra en la figura 3.35. El filtro eléctrico pasa banda se puede construir a partir del mismo, conectando una admitancia Y del nodo α a tierra.

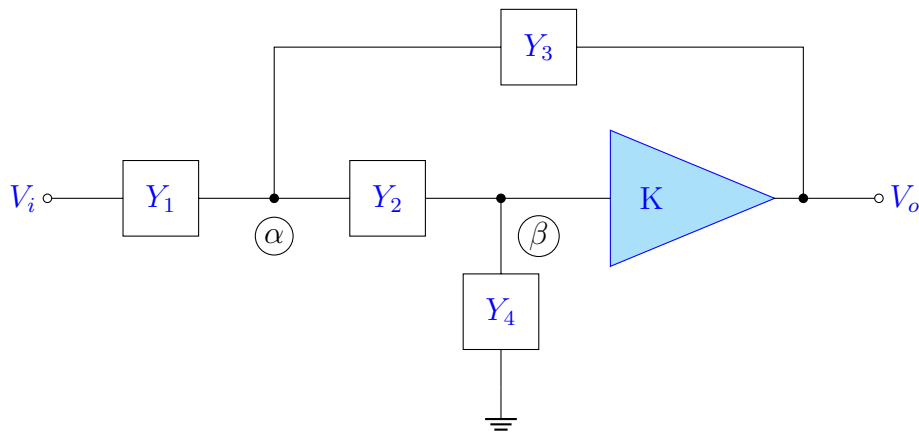


Figura 3.35: Filtro eléctrico general de segundo orden con fuente de voltaje controlada por voltaje.

Considerando que $V_o = K V_\beta$, las ecuaciones de nodo para α y β son, respectivamente

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3)V_\alpha - Y_2 \frac{V_o}{K} - Y_3 V_o = Y_1 V_i$$

$$(Y_2 + Y_4) \frac{V_o}{K} - Y_2 V_\alpha = 0$$

así

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{KY_1Y_2}{(Y_2 + Y_4)(Y_1 + Y_2 + Y_3) - Y_2Y_2 + KY_2Y_3} \quad (3.46)$$

Capítulo 4

Teoremas de redes eléctricas

4.1. Introducción

En este capítulo se estudian teoremas generales sobre redes eléctricas, de gran utilidad y aplicación en el estudio, análisis y síntesis de las mismas. Se pueden emplear en una ingente cantidad de redes eléctricas que se encuentran en la práctica y conducen a soluciones simples y elegantes. Esta generalidad y simplicidad pueden ser engañosas; ya que frecuentemente no se percibe el alcance de su aplicación o se malinterpreta su significado.

La principal suposición subyacente es la unicidad de la solución de las redes eléctricas para el conjunto de entradas y condiciones iniciales dadas. La razón primigenia de su empleo es que la red eléctrica modificada es más simple o sencilla de estudiar y analizar que la red eléctrica original.

4.2. Teorema de Sustitución

Este teorema es de carácter general y se puede aplicar a redes eléctricas lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo. Su aplicación se restringe a redes eléctricas de parámetros concentrados o sea que satisfagan las leyes de Kirchhoff y que además sean determinísticas, es decir, que no se tenga incertidumbre acerca de los voltajes y las corrientes de rama.

El teorema asevera lo siguiente: Considere la figura 4.1a, en donde se muestra la red eléctrica η compuesta por el circuito eléctrico η_R que a su vez está formado por elementos posiblemente no lineales y variantes en el tiempo, conectado al circuito eléctrico η_L el cual no necesariamente es lineal.

1. Si la red eléctrica η tiene solución única $v = \hat{v}(t)$ para todo t , entonces η_L puede sustituirse por una fuente de voltaje de valor $\hat{v}(t)$ sin que se afecten los voltajes y las corrientes de rama dentro de η_R , siempre y cuando el circuito modificado η_v de la figura 4.1b tenga solución única para todo t .

2. Si la red eléctrica η tiene solución única $i = \hat{i}(t)$ para todo t , entonces η_L puede sustituirse por una fuente de corriente de valor $\hat{i}(t)$ sin que se afecten los voltajes y las corrientes de rama dentro de η_R , siempre y cuando el circuito modificado η_i de la figura 4.1c tenga solución única para todo t .

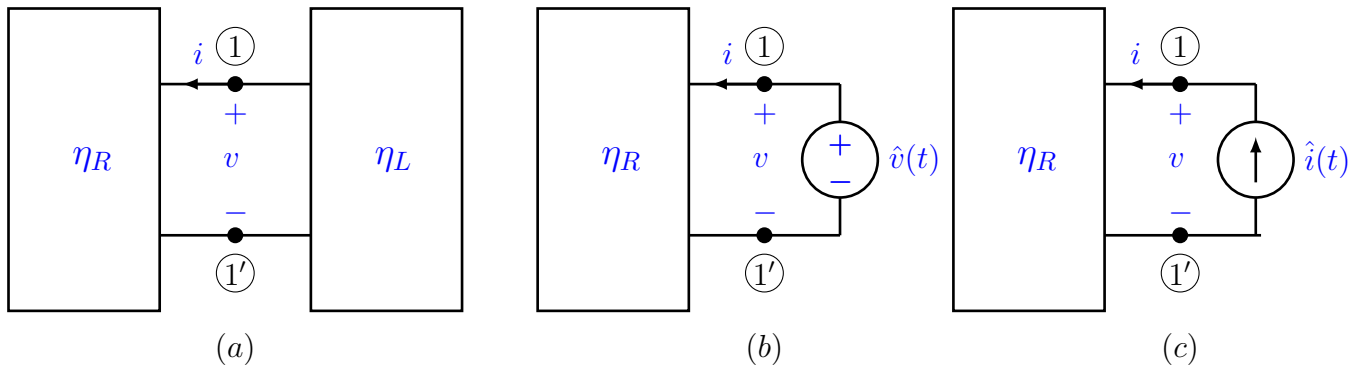


Figura 4.1: (a) Red eléctrica η . (b) Red eléctrica modificada η_v . (c) Red eléctrica modificada η_i .

Ejemplo 4.1 Determine la función de transferencia del circuito eléctrico que se muestra en la figura 4.2a.

Aplicando el teorema de sustitución y considerando las características esenciales del amplificador operacional, se obtiene el circuito eléctrico de la figura 4.2b. A continuación, dado que las fuentes independientes de voltaje y los resistores están en paralelo, al aplicar nuevamente el teorema de sustitución se tiene el circuito de la figura 4.2c.

La ecuación de mallas del circuito eléctrico de la figura 4.2c es

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ -V_o \end{bmatrix}$$

resolviendo para las corrientes de malla

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_2 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_1 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ -V_o \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \Delta = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$$

De la LCK, en el nodo $\textcircled{\alpha}$ del circuito de la figura 4.2b, considerando las direcciones de referencia asociadas, se tiene

$$I_1 - I_2 + \frac{V_i}{R} + \frac{V_o}{R} = 0$$

$$\frac{Z_2}{\Delta} V_i + \frac{Z_1}{\Delta} V_o + \frac{V_i}{R} + \frac{V_o}{R} = 0$$

agrupando términos

$$\left(\frac{Z_2}{\Delta} + \frac{1}{R} \right) V_i + \left(\frac{Z_1}{\Delta} + \frac{1}{R} \right) V_o = 0$$

finalmente

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \frac{\frac{Z_2}{\Delta} + \frac{1}{R}}{\frac{Z_1}{\Delta} + \frac{1}{R}}$$

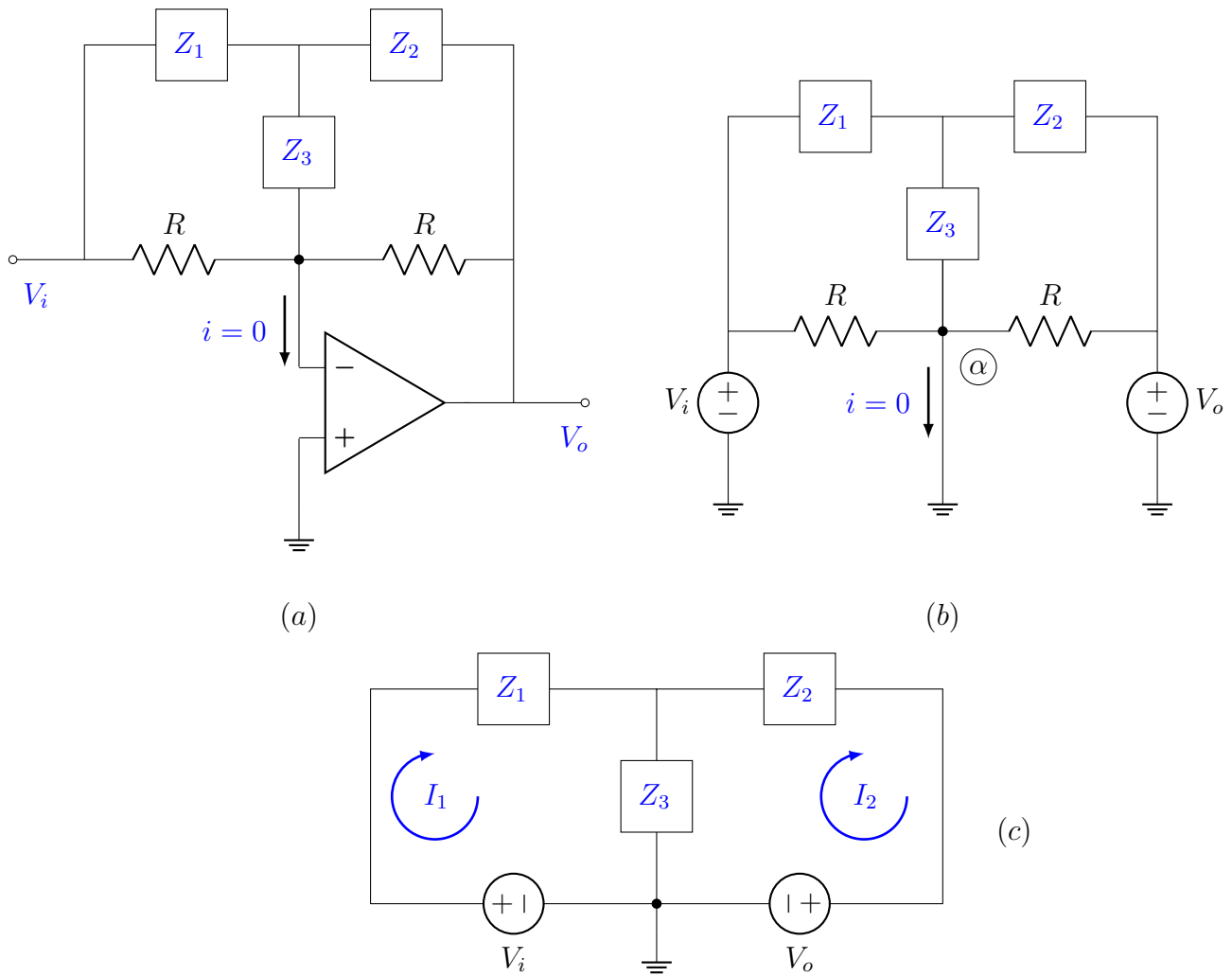


Figura 4.2: Etapa básica de un equalizador.

Prueba del teorema

Inicialmente la red eléctrica η_L se trata como si fuera una sola rama. Las ramas de η_R se etiquetan consecutivamente desde 1 hasta $b - 1$ y la rama restante b corresponde a la red η_L , es decir, la fuente de voltaje $\hat{v}(t)$ o la fuente de corriente $\hat{i}(t)$. Las ecuaciones de la red eléctrica η están dadas por:

De la ley de corrientes de Kirchhoff, (LCK)

$$[A] \begin{bmatrix} \mathbf{j}_R \\ j_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

y de la ley de voltajes de Kirchhoff, (LVK)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_R \\ v_b \end{bmatrix} - [A]^T [\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

El punto de operación de la red eléctrica η se encuentra a partir de las ecuaciones de rama siguientes

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}_R, \mathbf{j}_R, t) = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

$$f_b(v_b, j_b, t) = 0 \quad (4.4a)$$

A continuación se considera la red eléctrica de la figura 4.1b. Las ecuaciones que la caracterizan son las ecuaciones de voltaje y de corriente anteriores, de la ecuación (4.1) a la (4.3), y además la ecuación

$$v_b - \hat{v}(t) = 0 \quad (4.4b)$$

que corresponde a la fuente *ideal* de voltaje.

Por otra parte, sean los vectores

$$[\underline{\hat{e}}(t)] \quad \begin{bmatrix} \underline{\hat{v}}_R(t) \\ \hat{v}_b(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \underline{\hat{j}}_R(t) \\ \hat{j}_b(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

que denotan la *solución única* de las ecuaciones (4.1) a la (4.4a). Sin embargo, dado que las ecuaciones de voltaje, de corriente y del punto de operación de las redes eléctricas de las figuras 4.1a y 4.1b son idénticas; las ecuaciones (4.5) son también una solución de las ecuaciones (4.1) a la (4.3) y de la ecuación (4.4b) ya que cualquier $j_b(t)$ satisfará a la ecuación (4.5), pues se trata de una fuente ideal de voltaje.

Pero por hipótesis, la red eléctrica de la figura 4.1b tiene solución única, por consiguiente, las ecuaciones (4.5) son también la solución de la red eléctrica en la que se ha aplicado el teorema de sustitución.

Una prueba similar es posible llevar a cabo para la red eléctrica de la figura 4.1c.

4.3. Teorema de Tellegen

El teorema establece que en una red eléctrica de n nodos y b ramas se cumple

$$\sum_{k=1}^b v_k j_k = 0 \quad (4.6)$$

donde v_k y j_k representan el voltaje y la corriente eléctrica de la k -ésima rama, respectivamente. Teniendo en cuenta la expresión anterior, una forma equivalente de teorema de Tellegen es

$$[\mathbf{V}]_k^T [\mathbf{J}]_k = 0 \quad (4.7)$$

donde $[\mathbf{V}]_k$ y $[\mathbf{J}]_k$ son los vectores de voltajes y corrientes eléctricas de rama, respectivamente.

Este teorema está relacionado con el principio de conservación de la energía. Ya que el producto $v_k j_k$ representa la potencia que se suministra o se consume en la k -ésima rama. La ecuación (4.6) nos dice que la potencia que se suministra a una red eléctrica es igual a la potencia que se consume en dicha red.

Este teorema es de carácter general y puede aplicarse a una red eléctrica lineal o no lineal, variante o invariante en el tiempo. La única restricción es que se deben satisfacer las leyes de Kirchhoff, es decir que la red eléctrica debe ser de parámetros concentrados y determinística.

Ejemplo 4.2 Considere la gráfica orientada que se muestra en la figura ???. Se selecciona en *forma arbitraria* los valores de la corriente j_1 , j_2 y j_3 y se calculan j_4 , j_5 y j_6 de forma tal que la LCK se satisfaga.

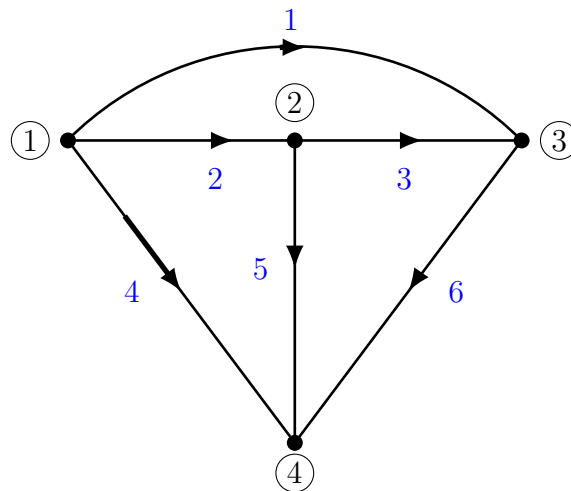


Figura 4.3: Gráfica orientada con cuatro nodos y seis ramas.

Sean

$$j_1 = 1[A] \quad j_2 = 2[A] \quad \text{y} \quad j_3 = 3[A]$$

entonces

$$j_4 = -3[A] \quad j_5 = -1[A] \quad \text{y} \quad j_6 = 4[A]$$

A continuación se seleccionan *arbitrariamente* v_4 , v_5 y v_6 y se encuentran v_1 , v_2 y v_3 tal que la LVK se satisfaga (se debe advertir que las direcciones de referencia están asociadas).

Sean

$$v_4 = 4[V] \quad v_5 = 5[V] \quad y \quad v_6 = 6[A]$$

así que

$$v_1 = -2[V] \quad v_2 = -1[V] \quad y \quad v_3 = -1[V]$$

Ahora es fácil verificar

$$\sum_{k=1}^6 v_k j_k = 0$$

Seleccione otro conjunto de valores de voltajes y corrientes de rama $\hat{v}_k(t)$ y $\hat{j}_k(t)$ y repita el ejercicio anterior, con los valores propuestos y los anteriores, es decir

$$\sum_{k=1}^6 \hat{v}_k \hat{j}_k = \sum_{k=1}^6 \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^6 v_k \hat{j}_k = 0$$

¿Qué se puede deducir?

Prueba del teorema

En una gráfica conectada G , seleccione un nodo de referencia, por lo cual la matriz de incidencia reducida $[\mathbf{A}]$ se define sin ambigüedad. Por otra parte dado que $[\mathbf{J}]_k$ satisface la LCK, se tiene

$$[\mathbf{A}][\mathbf{J}]_k = 0 \tag{4.8}$$

De la misma manera $[\mathbf{V}]_k$ satisface la LVK y considerando direcciones de referencia asociadas, para un vector de voltajes de nodo $[\mathbf{E}]_n$, se cumple

$$[\mathbf{V}]_k = [\mathbf{A}]^T [\mathbf{E}]_n \tag{4.9}$$

Sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en la ecuación (4.7), resulta

$$[\mathbf{V}]_k^T [\mathbf{J}]_k = \left[[\mathbf{A}]^T [\mathbf{E}]_n \right]^T [\mathbf{J}]_k = [\mathbf{E}]_n^T \left[[\mathbf{A}]^T \right]^T [\mathbf{J}]_k = [\mathbf{E}]_n^T \left[[\mathbf{A}][\mathbf{J}]_k \right] = 0 \tag{4.10}$$

4.4. Teorema de Superposición

Este teorema se aplica únicamente a redes eléctricas *lineales*, variantes o invariantes en el tiempo y de parámetros concentrados. El teorema establece que *la respuesta de estado cero* de una red eléctrica debido a varias fuentes independientes de entrada actuando simultáneamente, es igual a la suma de las respuestas de estado cero debidas a cada una de las fuentes independientes de entrada actuando por separado.

Ejemplo 4.3 Considere la red eléctrica lineal de la figura 4.4. La red se encuentra en el estado inicial cero, esto es, $v(0^-) = 0$. Las fuentes independientes son $i_s(t) = Iu_{-1}(t)$ [A] y $e_s(t) = E\delta(t)$ [V], donde I y E son constantes. El voltaje en el capacitor es la respuesta o la salida que se quiere conocer.

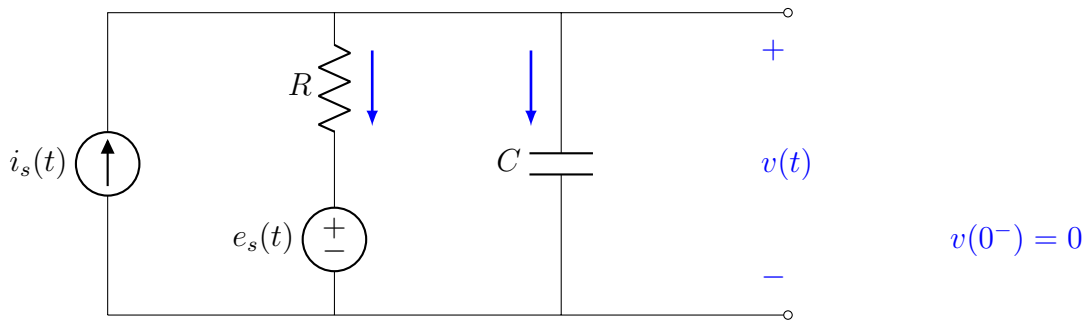


Figura 4.4: Red eléctrica de primer orden con dos fuentes independientes

La ecuación diferencial que modeliza a la red eléctrica se obtiene a continuación.

Las leyes de conjunto son

$$i_s(t) = i_R(t) + i_C(t) \quad (4.11)$$

y

$$e_s(t) + v_R(t) = e_s(t) + Ri_R(t) = v(t) \quad (4.12)$$

de donde

$$i_R(t) = \frac{1}{R}[v(t) - e_s(t)] \quad (4.13)$$

sustituyendo la ecuación (4.13) en la (4.11) y teniendo presente que $i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$, se tiene

$$i_s(t) = \frac{v(t) - e_s(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt}$$

acomodando términos, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [v(t)] &= \left[-\frac{1}{RC} \right] [v(t)] + \left[\frac{1}{C} \quad \frac{1}{RC} \right] \begin{bmatrix} i_s(t) \\ e_s(t) \end{bmatrix} \\ [y(t)] &= [1] [v(t)] \end{aligned}$$

La matriz de transición de estados o matriz exponencial, se encuentra auxiliándose con la transformada de Laplace

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right\} = e^{-\frac{1}{RC}t}$$

por consiguiente, el voltaje en el capacitor es

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t [1] e^{-\frac{1}{RC}(t-\sigma)} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s(\sigma) \\ e_s(\sigma) \end{bmatrix} d\sigma \\ v(t) &= e^{-\frac{1}{RC}t} \int_0^t e^{\frac{1}{RC}\sigma} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Iu_{-1}(\sigma) \\ E\delta(\sigma) \end{bmatrix} d\sigma \\ v(t) &= e^{-\frac{1}{RC}t} \left[\int_0^t e^{\frac{1}{RC}\sigma} \frac{1}{C} Iu_{-1}(\sigma) d\sigma + \int_0^t e^{\frac{1}{RC}\sigma} \frac{1}{RC} E\delta(\sigma) d\sigma \right] \\ v(t) &= \frac{I}{C} e^{-\frac{1}{RC}t} \int_0^t e^{\frac{1}{RC}\sigma} d\sigma + \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \int_0^t e^{\frac{1}{RC}\sigma} \delta(\sigma) d\sigma \\ v(t) &= IR e^{-\frac{1}{RC}t} \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{RC}t} & -1 \end{bmatrix} + \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \\ v(t) &= IR \left[1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right] + \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} [V] \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

es factible verificar que la suma de las respuestas de estado cero debidas a $i_s(t)$ y $e_s(t)$ actuando por separado proporciona la misma respuesta anterior, como presupone el teorema de superposición.

Prueba del teorema

La respuesta de estado cero $\underline{y}_{zs}(t)$, de una red eléctrica cuyo modelo en variables de estado es

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{u}(t) \end{aligned} \tag{4.14}$$

está dada por la siguiente expresión

$$\underline{y}_{zs}(t) = \underline{C}(t) \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, \sigma) \underline{B}(\sigma) \underline{u}(\sigma) d\sigma + \underline{D}(t) \underline{u}(t) \tag{4.15}$$

donde $\underline{u}(t)$ es el vector de entrada de dimensión $(r \times 1)$, de la forma $\underline{u}(t)^T = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_r(t)]$ y que se puede expresar como

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_2(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^r \underline{u}_k(t) \tag{4.16}$$

y $\underline{\Phi}(t, \sigma)$ es la *matriz de transición de estados* de dimensión $(n \times n)$, la cual se determina a partir de la siguiente expresión

$$\underline{\Phi}(t, t_o) = \underline{I} + \int_{t_o}^t \underline{A}(\sigma) d\sigma + \int_{t_o}^t \underline{A}(\sigma_1) \int_{t_o}^{\sigma_1} \underline{A}(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots \quad (4.17)$$

Por otra parte, la respuesta de estado cero $\underline{y}_{zsi}(t)$ debida a la i -ésima fuente independiente, está dada por

$$\underline{y}_{zsi}(t) = \underline{C}(t) \int_{t_o}^t \underline{\Phi}(t, \sigma) \underline{B}(\sigma) \underline{u}_i(\sigma) d\sigma + \underline{D}(t) \underline{u}_i(t) \quad (4.18)$$

Comparando las ecuaciones (4.15) y (4.18) y teniendo presente la ecuación (4.16), se tiene

$$\underline{y}_{zs}(t) = \sum_{i=1}^r \underline{y}_{zsi}(t) \quad (4.19)$$

comprobándose el teorema.

Como comentario final, vale la pena notar que la ecuación (4.15) puede escribirse como ¹

$$\begin{aligned} \underline{y}_{zs}(t) &= \int_{t_o}^t [\underline{C}(t) \underline{\Phi}(t, \sigma) \underline{B}(\sigma) + \underline{D}(\sigma) \delta(t - \sigma)] \underline{u}(\sigma) d\sigma \\ \underline{y}_{zs}(t) &= \int_{t_o}^t \underline{H}(t, \sigma) \underline{u}(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde la matriz $\underline{H}(t, \sigma)$, recibe el nombre de *patrón de peso o matriz de respuesta al impulso de la red eléctrica o sistema*.

¹La propiedad de muestreo de la función impulso es $\int_{-\infty}^{\infty} f(t + \sigma) \delta(t) dt = f(\sigma)$, si $f(t)$ es continua en $t = \sigma$.

4.5. Teorema de Thévenin y Norton

Considere la *red eléctrica lineal* η conectada a una *carga eléctrica arbitraria*, que se muestra en la figura 4.5.

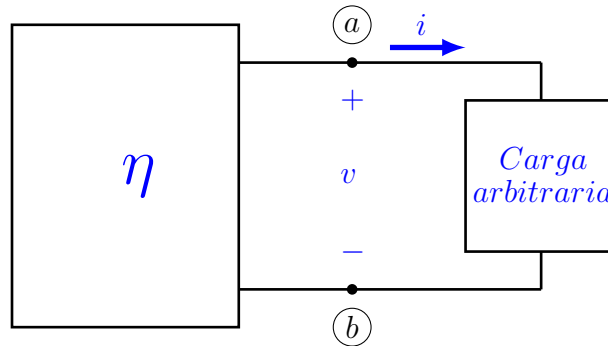


Figura 4.5: Red eléctrica lineal conectada a una carga arbitraria.

Es necesario *enfatizar* que no hay ningún tipo de acoplamiento entre la red eléctrica η y la carga eléctrica arbitraria. El teorema afirma que la corriente eléctrica i y el voltaje v no se afectan si la red eléctrica lineal se reemplaza por su circuito equivalente de Thévenin o por su circuito equivalente de Norton. Es importante, además, hacer hincapié en el hecho de que no se hace ninguna suposición de la carga eléctrica arbitraria, puede ser lineal o no lineal y variante o invariante en el tiempo.

El circuito equivalente de Thévenin consiste de una red eléctrica de dos terminales η_o en serie con una fuente independiente de voltaje de valor e_{oc} . El voltaje e_{oc} es el voltaje que aparece en las terminales de la red eléctrica η cuando se desconecta la carga arbitraria; y es causado por todas las fuentes independientes y las condiciones iniciales presentes en dicha red eléctrica η . El circuito eléctrico η_o se obtiene de la red eléctrica original η al cancelar todas las fuentes independientes y anulando todas las condiciones iniciales. *Las fuentes dependientes no se modifican*. El circuito equivalente de Thévenin se muestra en la figura 4.6.

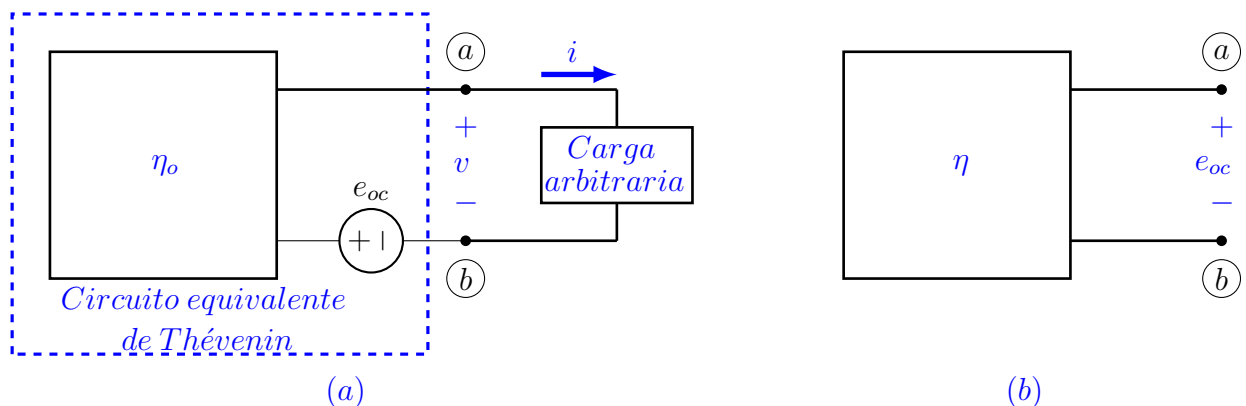


Figura 4.6: (a) Circuito eléctrico equivalente de Thévenin. (b) Voltaje de circuito abierto e_{oc} .

El circuito equivalente de Norton consiste de una red eléctrica de dos terminales η_o en paralelo con una fuente independiente de corriente de valor i_{sc} . La corriente eléctrica i_{sc} es la corriente que fluye desde las terminales de la red eléctrica η cuando se pone la carga eléctrica arbitraria en corto

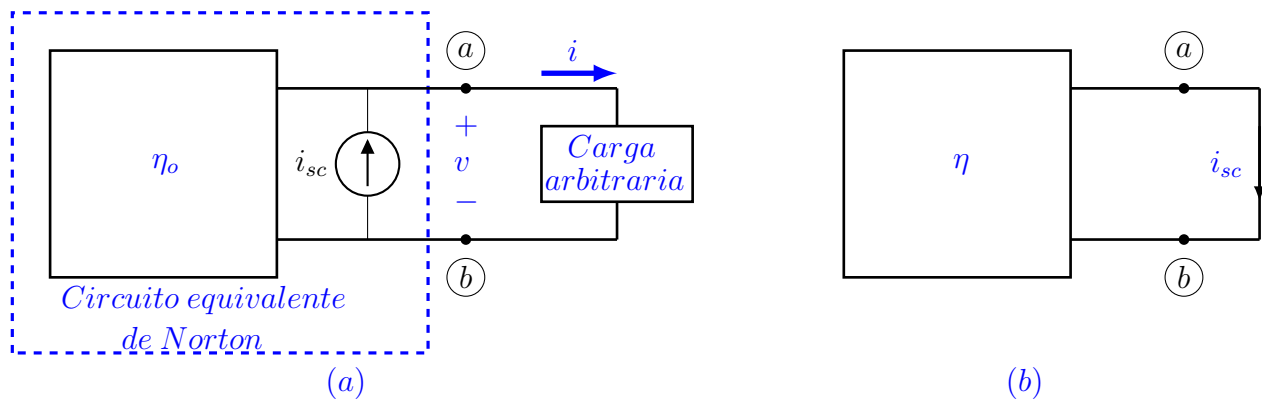


Figura 4.7: (a) Circuito eléctrico equivalente de Norton. (b) Corriente de corto circuito i_{sc} .

circuito; y es causada por todas las fuentes independientes y las condiciones iniciales presentes en la red eléctrica η . El circuito eléctrico η_o se obtiene de la red eléctrica original η al cancelar todas las fuentes independientes y anulando todas las condiciones iniciales. *Las fuentes dependientes no se modifican*. El circuito equivalente de Norton se muestra en la figura 4.7.

Caso particular

Cuando la red eléctrica η además de ser lineal es *invariante en el tiempo*, resulta beneficioso trabajar con la transformada de Laplace.

Sea $E_{oc}(s)$ la transformada de Laplace del voltaje de circuito abierto $e_{oc}(t)$ presente en las terminales \textcircled{a} - \textcircled{b} de la red eléctrica η cuando ninguna corriente eléctrica fluye desde la red eléctrica. También, sea $I_{sc}(s)$ la transformada de Laplace de la corriente eléctrica de corto circuito $i_{sc}(t)$ que fluye desde la red eléctrica η cuando se ponen en corto circuito sus terminales \textcircled{a} - \textcircled{b} . Asimismo, sea $Z_{eq}(s) = 1/Y_{eq}(s)$ la impedancia de la red eléctrica η , vista desde la carga arbitraria, al cancelar tanto las fuentes independientes como las condiciones iniciales.

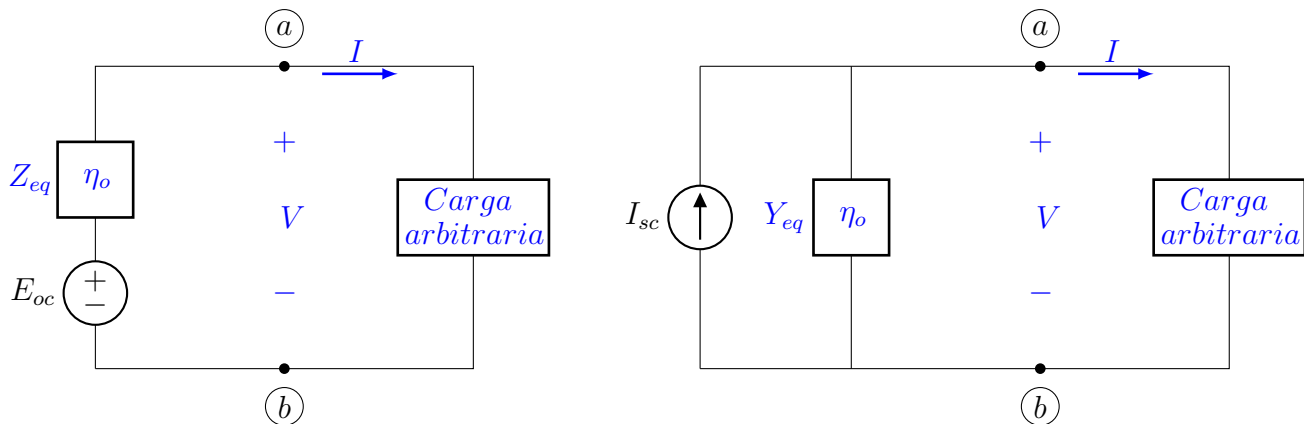


Figura 4.8: Circuito eléctrico equivalente de Thévenin y circuito equivalente de Norton, de una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo.

La relación entre las transformadas de Laplace $I_{sc}(s)$ y $E_{oc}(s)$ es

$$E_{oc}(s) = Z_{eq}(s)I_{sc}(s)$$

o

$$I_{sc}(s) = Y_{eq}(s)E_{oc}(s)$$

Bajo estas condiciones, para cualquier tipo de carga eléctrica arbitraria, su voltaje $V(s)$ y su corriente eléctrica $I(s)$, transformadas de Laplace de $v(t)$ e $i(t)$ respectivamente, no se modifican cuando la red eléctrica η se sustituye ya sea por su circuito equivalente de Thévenin o su circuito equivalente de Norton, como se ilustra en la figura 4.8.

Ejemplo 4.4 Considere el circuito eléctrico equivalente de señal pequeña de un transistor en configuración de emisor común, que se muestra en la figura 4.9, donde $i_s(t) = 10^{-5} \cos \omega t$ [A] y

$$\begin{aligned} r_\pi &= 10^3 \ \Omega & r_c &= 10^4 \ \Omega & r_o &= 10^6 \ \Omega \\ C_\pi &= 10^{-10} \ F & C_o &= 10^{-11} \ F & g_m &= 10^{-1} \ S \\ \omega &= 10^7 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

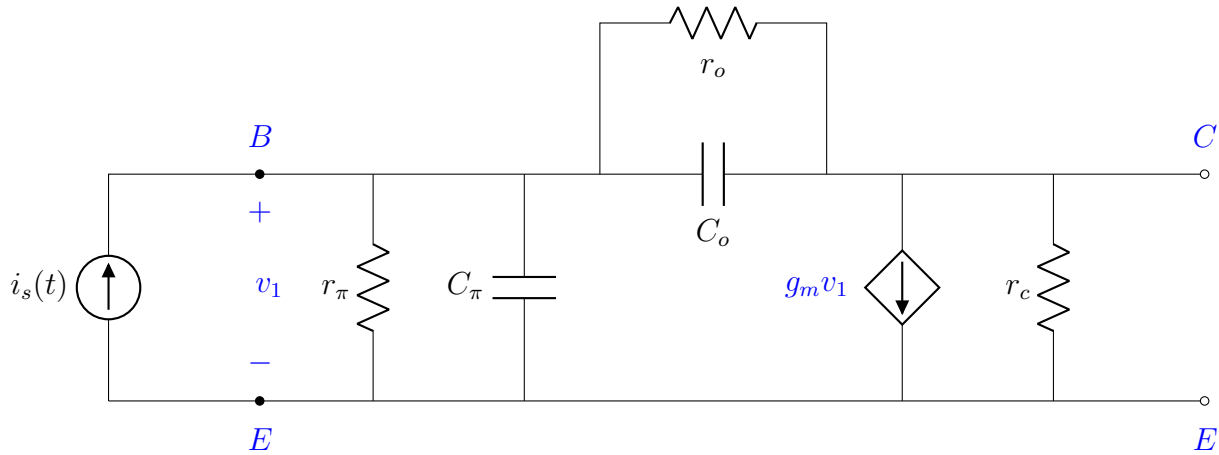


Figura 4.9: Modelo de señal pequeña de un transistor en el modo de emisor común.

Si el circuito está en estado sinusoidal permanente, encuentre

- El circuito equivalente de Thévenin de la red eléctrica a la izquierda de los nodos C y E .
- El circuito equivalente de Norton de la red eléctrica a la izquierda de los nodos C y E .

Empleando el *método abreviado* (análisis por nodos), es posible determinar el voltaje de circuito abierto $E_{oc} = V_{CE}$

La ecuación de nodos que se obtiene por inspección es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_\pi} + j\omega(C_o + C_\pi) & -\left(\frac{1}{r_o} + j\omega C_o\right) \\ -\left(\frac{1}{r_o} + j\omega C_o\right) & \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_o} + j\omega C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{BE} \\ \mathbf{V}_{CE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ -g_m \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ -g_m \mathbf{V}_{BE} \end{bmatrix}$$

reorganizando

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_\pi} + j\omega(C_o + C_\pi) & -\left(\frac{1}{r_o} + j\omega C_o\right) \\ g_m - \left(\frac{1}{r_o} + j\omega C_o\right) & \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_o} + j\omega C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{BE} \\ \mathbf{V}_{CE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

y resolviendo para determinar el fasor asociado del voltaje *colector-emisor* (voltaje de circuito abierto) $\mathbf{E}_{oc} = \mathbf{V}_{CE}$, se tiene

$$\mathbf{V}_{CE} = \frac{97.9279 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} \angle 90.510^\circ$$

Debido a la presencia de la fuente de corriente dependiente, no es posible conocer de manera directa la red eléctrica “*relajada*” o red eléctrica equivalente de estado cero y entrada cero. Una posibilidad es por medio del voltaje de circuito abierto \mathbf{E}_{oc} (ya se calculó) y la corriente de corto circuito \mathbf{I}_{sc} del circuito de la figura 4.10.

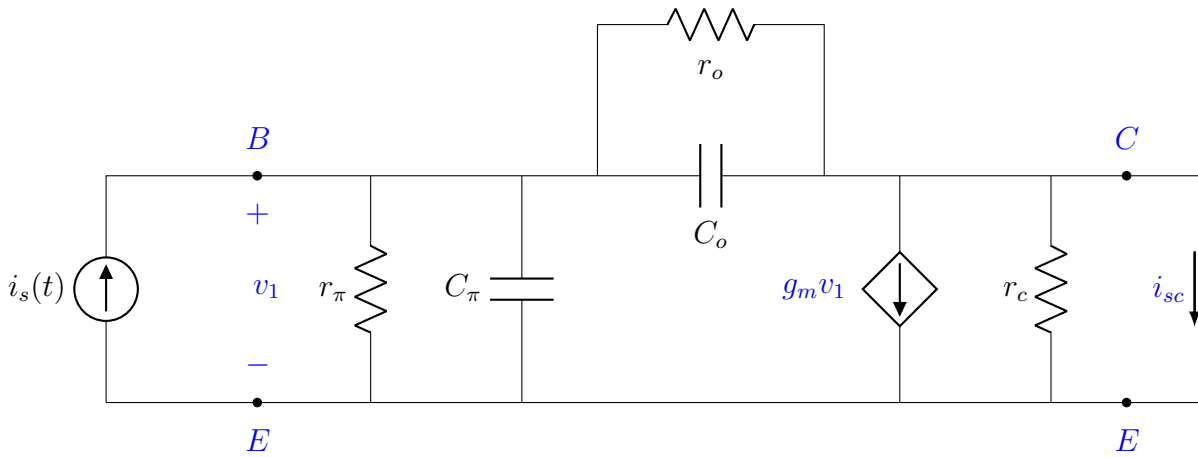


Figura 4.10: Obtención de la corriente de corto circuito i_{sc} .

Para determinarla, se encuentra inicialmente, el fasor asociado al voltaje v_1 . Así, de la ecuación de nodos

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{I}_s}{\frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_\pi} + j\omega(C_o + C_\pi)} = \frac{6.7237 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} \angle -47.6978^\circ$$

ahora, notando que

$$\left(\frac{1}{r_o} + j\omega C_o\right) \mathbf{V}_1 = g_m \mathbf{V}_1 + \mathbf{I}_{sc}$$

despejando el fasor correspondiente a la corriente de corto circuito \mathbf{I}_{sc}

$$\mathbf{I}_{sc} = \left(-g_m + \frac{1}{r_o} + j\omega C_o\right) \mathbf{V}_1 = \frac{672.3621 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} \angle 132.2449^\circ$$

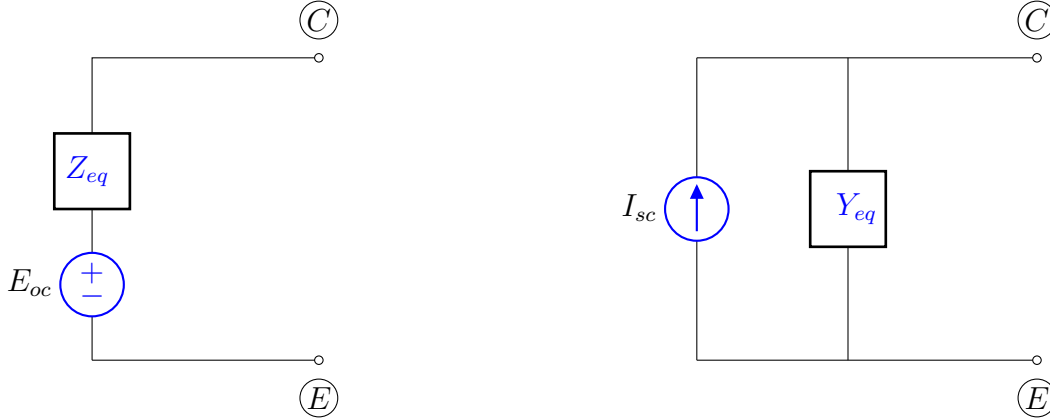


Figura 4.11: Circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton de la red eléctrica del ejemplo 4.4.

así, se tiene finalmente

$$Z_{eq} = \frac{\mathbf{E}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = 145.6475 \angle -41.7349^\circ \quad Y_{eq} = \frac{\mathbf{I}_{sc}}{\mathbf{E}_{oc}} = 6.8659 \times 10^{-3} \angle 41.7349^\circ$$

Los circuitos eléctricos que se buscan se muestran en la figura 4.11.

Prueba del teorema

Únicamente se verifica la validez del circuito equivalente de Thévenin. La prueba correspondiente para el circuito equivalente de Norton, se puede desarrollar de forma semejante.

Primero, se sustituyen todas las condiciones iniciales por fuentes independientes, de manera tal que la red eléctrica no contenga energía inicial y sea factible aplicar el teorema de superposición.

A continuación, empleando el teorema de sustitución, la carga arbitraria se suple por una fuente independiente de corriente de valor i .

Como la red eléctrica se ha supuesto lineal, se puede recurrir al teorema de superposición, para determinar el voltaje v . Este voltaje v es la respuesta de estado cero debida a dos conjuntos de fuentes independientes; la primera es la fuente independiente de corriente i que ha sustituido a la carga arbitraria y la otra son las fuentes independientes de la red eléctrica η .

La respuesta de estado cero que causa la fuente de corriente es

$$v_i(t) = \int_0^t h(t, \tau) i(\tau) d\tau$$

donde $h(t, \tau)$ es la respuesta al impulso de la red eléctrica relajada η_o en el tiempo t cuando se aplica un impulso unitario en el tiempo $t = \tau$.

Para determinar el voltaje ocasionado por las fuentes independientes en la red eléctrica η , se ponen en circuito abierto sus terminales, para suprimir la fuente de corriente i (que ha sustituido a la carga arbitraria). Este voltaje de circuito abierto, se denota como e_{oc} .

Considerando, nuevamente, que la red eléctrica η es lineal, el voltaje $v(t)$ resulta ser

$$v(t) = v_i(t) + e_{oc}(t) = \int_0^t h(t, \tau) i(\tau) d\tau + e_{oc}(t)$$

Ahora considere el circuito equivalente de Thévenin, en la figura 4.12. Para la malla que se muestra, de la segunda ley de Kirchhoff se tiene

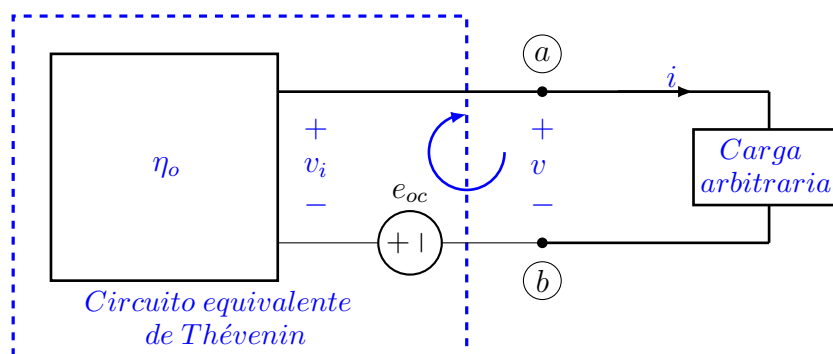


Figura 4.12: Circuito eléctrico equivalente de Thévenin.

$$v(t) = v_i(t) + e_{oc}(t) = \int_0^t h(t, \tau) i(\tau) d\tau + e_{oc}(t)$$

que es exactamente la misma ecuación que ya se ha obtenido antes.

4.6. Teorema de Reciprocidad

El teorema que se estudia a continuación tiene un empleo más restringido que los teoremas anteriores, pues sólo se destina a redes lineales e invariantes en el tiempo y que además no contengan fuentes dependientes ni *giradores*. El quid fundamental del teorema es que cuando se aplica a un sistema físico, la entrada y la salida se pueden intercambiar sin que se modifique la señal de la respuesta del sistema para una señal de entrada dada. La línea telefónica constituye el prototipo de lo anterior.

Considere una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo, constituida por resistores, inductores, inductores acoplados, capacitores y transformadores. Se acostumbra, emplear el símbolo η_R para designar a las redes eléctricas que satisfacen estas condiciones.

1. Aserción. Considere las dos redes eléctricas recíprocas que se muestran en la figura 4.13.

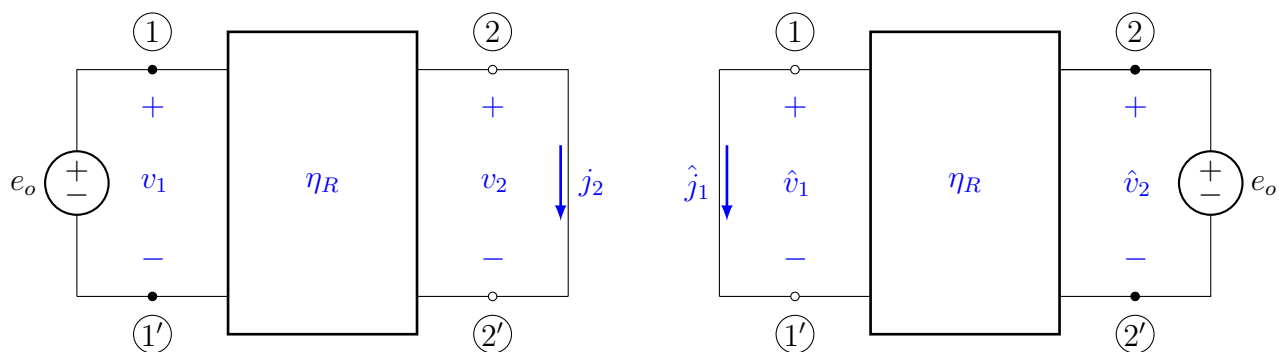


Figura 4.13: Primer aserto del teorema de reciprocidad.

El teorema de reciprocidad afirma que para cualquier configuración y valores de los elementos de la red eléctrica η_R y para toda forma de onda de la fuente independiente de voltaje e_o , las corrientes eléctricas de corto circuito

$$j_2(t) = \hat{j}_1(t) \quad \forall t$$

En términos de la función de transferencia

$$Y_{21}(s) \triangleq \frac{J_2(s)}{E_o(s)} = Y_{12}(s) \triangleq \frac{\hat{J}_1(s)}{E_o(s)}$$

2. Aserción. Considere las dos redes eléctricas recíprocas que se muestran en la figura 4.14

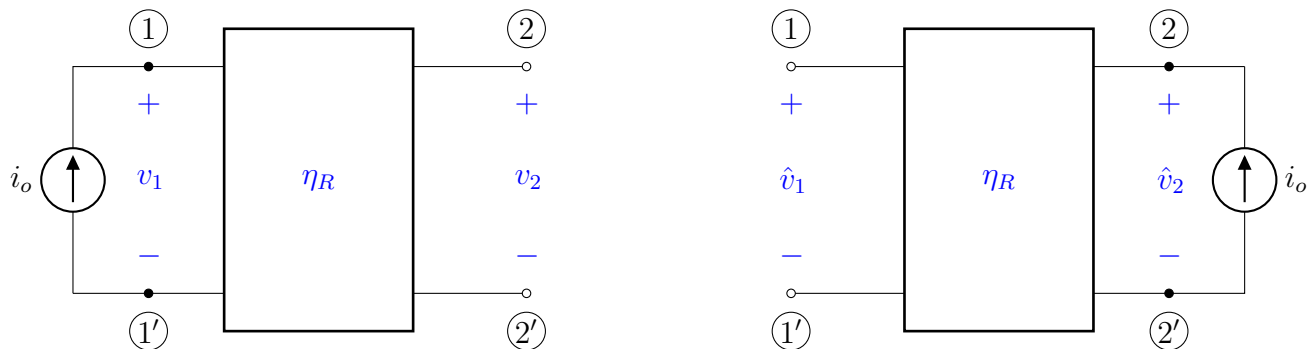


Figura 4.14: Segundo aserto del teorema de reciprocidad.

El teorema de reciprocidad afirma que para cualquier configuración y valores de los elementos de la red eléctrica η_R y para toda forma de onda de la fuente independiente de corriente i_o , los voltajes de circuito abierto

$$v_2(t) = \hat{v}_1(t) \quad \forall t$$

De igual manera, en términos de la función de transferencia

$$Z_{21}(s) \triangleq \frac{V_2(s)}{I_o(s)} = Z_{12}(s) \triangleq \frac{\hat{V}_1(s)}{I_o(s)}$$

3. Aserción. Considere las dos redes eléctricas recíprocas que se muestran en la figura 4.15

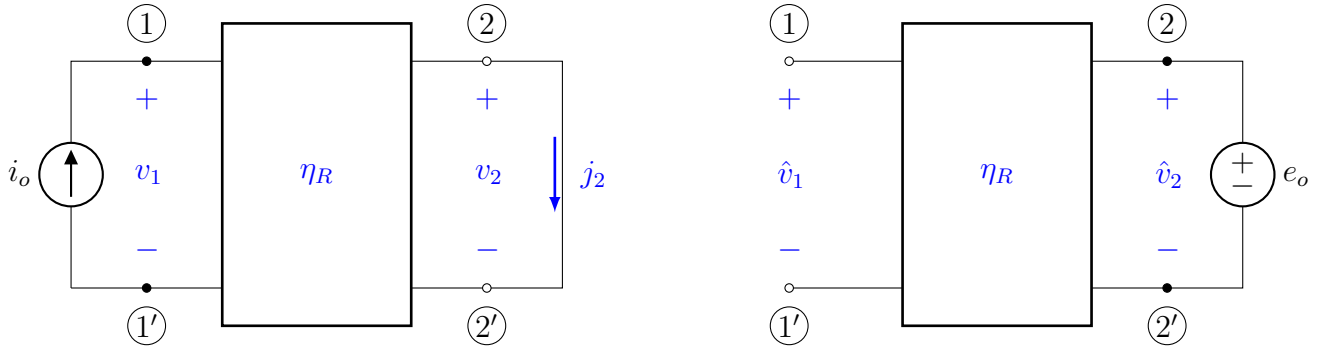


Figura 4.15: Tercer aserto del teorema de reciprocidad.

El teorema de reciprocidad afirma que para cualquier topología y valores de los elementos de las redes eléctricas η_R y para toda forma de onda de las fuentes independientes, si $i_o(t)$ y $e_o(t)$ son iguales para todo t , entonces

$$j_2(t) = \hat{v}_1(t) \quad \forall t$$

En términos de la función de transferencia

$$H_i(s) \triangleq \frac{J_2(s)}{I_o(s)} = H_v(s) \triangleq \frac{\hat{V}_1(s)}{E_o(s)}$$

Prueba del teorema

La validez de este teorema se verifica a partir del teorema de Tellegen. De acuerdo a las configuraciones planteadas por el teorema y considerando direcciones de referencia asociadas, es obvio que

$$V_1(s)\hat{J}_1(s) + V_2(s)\hat{J}_2(s) + \sum_{k=3}^b V_k(s)\hat{J}_k(s) = 0 \quad (4.21)$$

y

$$\hat{V}_1(s)J_1(s) + \hat{V}_2(s)J_2(s) + \sum_{k=3}^b \hat{V}_k(s)J_k(s) = 0 \quad (4.22)$$

Si la k -ésima rama de la red eléctrica es un resistor, un capacitor o un inductor, entonces es cierto que

$$V_k(s)\hat{J}_k(s) = J_k(s)Z_k(s)\hat{J}_k(s) = J_k(s)\hat{V}_k(s) \quad (4.23)$$

donde $Z_k(s)$ es la impedancia de la k -ésima rama. Si las ramas m y n fueran dos inductores acoplados o las ramas de un transformador ideal, entonces

$$V_p(s)\hat{J}_p(s) + V_s(s)\hat{J}_s(s) = \hat{V}_p(s)J_p(s) + \hat{V}_s(s)J_s(s) \quad (4.24)$$

Teniendo presente las ecuaciones (4.23) y (4.24), se puede inferir que las sumas de las ecuaciones (4.21) y (4.22) son iguales y por consiguiente

$$V_1(s)\hat{J}_1(s) + V_2(s)\hat{J}_2(s) = \hat{V}_1(s)J_1(s) + \hat{V}_2(s)J_2(s) \quad (4.25)$$

1. Aserción. En la primera condición, $V_1(s) = E_o(s)$ y $V_2(s) = 0$. En la segunda condición $\hat{V}_2(s) = E_o(s)$ y $\hat{V}_1(s) = 0$. Así, de la ecuación (4.25) se tiene

$$E_o(s)\hat{J}_1(s) = E_o(s)J_2(s)$$

2. Aserción. En la primera condición, $J_1(s) = -I_o(s)$ y $J_2(s) = 0$. En la segunda condición $\hat{J}_2(s) = -I_o(s)$ y $\hat{J}_1(s) = 0$. Así, de la ecuación (4.25) se tiene

$$-V_2(s)I_o(s) = -\hat{V}_1(s)I_o(s)$$

3. Aserción. En la primera condición, $J_1(s) = -I_o(s)$ y $V_2(s) = 0$. En la segunda condición $\hat{V}_2(s) = E_o(s)$ y $\hat{J}_1(s) = 0$. Así, de la ecuación (4.25) se tiene

$$\frac{\hat{V}_1(s)}{E_o(s)} = \frac{J_2(s)}{I_o(s)}$$

4.7. Teorema de Máxima Transferencia de Energía

Suponga que un generador suministra energía a una carga eléctrica como muestra la figura 4.16. Sea la impedancia del generador en términos de su parte real (*resistencia*) y su parte imaginaria (*reactancia*).

$$Z_G(j\omega) = R_G(\omega) + jX_G(\omega)$$

De la misma manera, sea la impedancia de la carga eléctrica de la forma

$$Z_L(j\omega) = R_L(\omega) + jX_L(\omega)$$

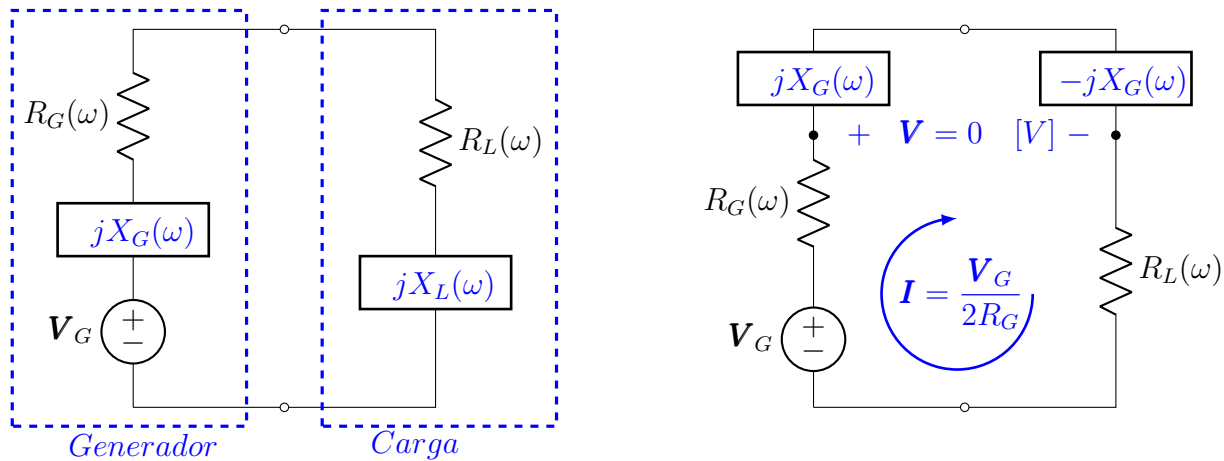


Figura 4.16: El generador suministra energía eléctrica a una carga eléctrica arbitraria.

Si el generador proporciona un voltaje cuya representación fasorial es \mathbf{V}_G . ¿Qué impedancia $Z_L(j\omega)$ (la de la carga eléctrica) recibirá la máxima potencia, suponiendo que la parte real y la parte imaginaria de $Z_L(j\omega)$ se pueden ajustar independientemente?

Como se sabe, la potencia promedio que se entrega a la carga eléctrica $Z_L(j\omega)$ es ¹

$$P = \frac{1}{2} I_m^2 R_L(\omega) \quad (4.26)$$

Empleando fasores

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_G}{R_G(\omega) + jX_G(\omega) + R_L(\omega) + jX_L(\omega)} = \frac{\mathbf{V}_G}{[R_G(\omega) + R_L(\omega)] + j[X_G(\omega) + X_L(\omega)]}$$

la amplitud de la señal de la corriente eléctrica es

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^2 + [X_G(\omega) + X_L(\omega)]^2}} \quad (4.27)$$

por lo que la potencia promedio es

¹El valor eficaz de la corriente eléctrica es $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

$$P = \frac{1}{2} \frac{R_L(\omega) V_m^2}{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^2 + [X_G(\omega) + X_L(\omega)]^2} \quad (4.28)$$

de la ecuación anterior, es obvio que si se quiere que P tenga un valor máximo es necesario que

$$X_L(\omega) = -X_G(\omega) \quad (4.29)$$

por lo que

$$P = \frac{V_m^2}{2} \frac{R_L(\omega)}{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^2} \quad (4.30)$$

Para encontrar el valor de R_L que hace a P máxima, se deriva la ecuación (4.30) con respecto a R_L , se iguala a cero y se resuelve para R_L . Así

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR_L} &= \frac{V_m^2}{2} \frac{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^2 - 2[R_G(\omega) + R_L(\omega)]R_L(\omega)}{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^4} \\ \frac{dP}{dR_L} &= \frac{V_m^2}{2} \frac{R_G(\omega) - R_L(\omega)}{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^3} = 0 \end{aligned}$$

lo que implica

$$R_L(\omega) = R_G(\omega) \quad (4.31)$$

Entonces el generador entrega a la carga eléctrica una potencia activa máxima de

$$P \Big|_{\text{máxima}} = \frac{1}{8} \frac{V_m^2}{R_G(\omega)} \quad (4.32)$$

cuando *la impedancia de la carga eléctrica es igual al complejo conjugado de la impedancia del generador*; o sea

$$Z_L(\omega) = R_G(\omega) - jX_G(j\omega) \quad (4.33)$$

Cuando esta condición se satisface, se dice que la impedancia de la carga eléctrica está *apareada* con la impedancia del generador, o simplemente que la carga eléctrica está *apareada* con el generador. Si la carga eléctrica está apareada con el generador, la corriente eléctrica en el circuito eléctrico de la figura 4.16 es

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{V}_G}{R_G(\omega)}$$

y la potencia promedio que entrega el generador es

$$P_G = \frac{1}{4} \frac{V_m^2}{R_G(\omega)}$$

Ejemplo 4.5 ¿Cuál debe ser el valor de la impedancia $Z_L(j\omega)$ del circuito eléctrico de la figura 4.17, para que la energía que consume por unidad de tiempo sea máxima? ¿Cuál es la potencia activa que se suministra a esta carga?

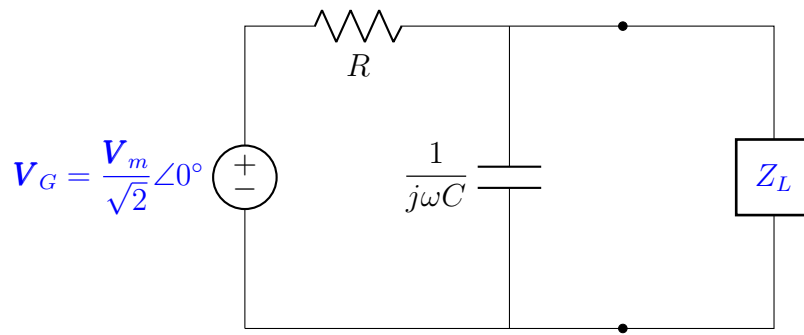


Figura 4.17: Generador alimentando a una carga arbitraria.

Primero se encuentra el circuito equivalente de Thévenin de la red eléctrica vista por la carga eléctrica $Z_L(j\omega)$, el cual se muestra en la figura ??a. El fasor correspondiente al voltaje de circuito abierto es

$$\mathbf{E}_{oc}(j\omega) = \frac{(1/(j\omega C))}{R + 1/(j\omega C)} \mathbf{V}_G = \frac{1}{1 + j\omega RC} \mathbf{V}_G$$

y la impedancia equivalente

$$Z_{Th}(j\omega) = \frac{R(1/(j\omega C))}{R + 1/(j\omega C)}$$

Si se desea suministrar la máxima potencia promedio a la carga $Z_L(j\omega)$, ésta debe ser el complejo conjugado de la impedancia del circuito equivalente de Thévenin, es decir del circuito RC .

$$Z_L(j\omega) = Z_{Th}(j\omega) \Big|_{j \text{ sustituida por } -j} = Z_{Th}(-j\omega) \tag{4.34}$$

$$Z_L(j\omega) = \frac{R(1/(-j\omega C))}{R + 1/(-j\omega C)} = \frac{R(j/(\omega C))}{R + j/(\omega C)} = \frac{R(j\omega L)}{R + j\omega L}$$

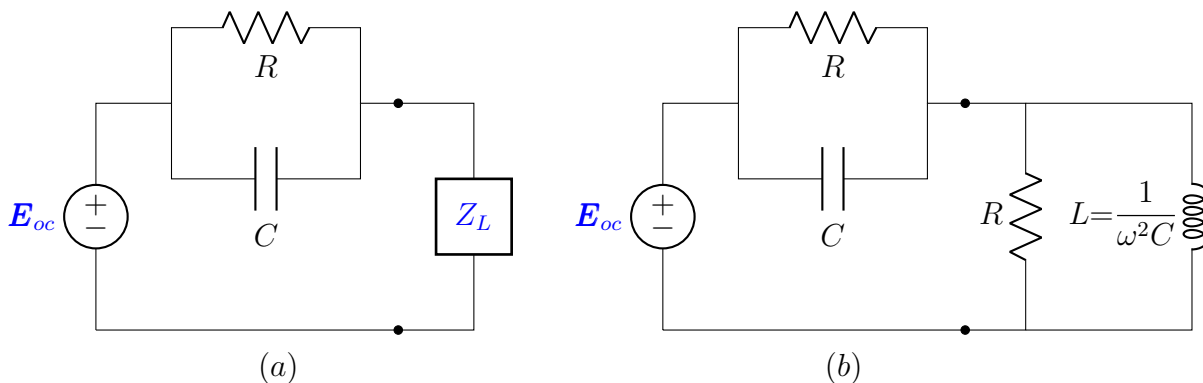


Figura 4.18: (a) Circuito equivalente de Thévenin. (b) Circuito con la impedancia de la carga eléctrica apareada con la impedancia del generador.

Es evidente, de la ecuación anterior que la $Z_L(j\omega)$ que se busca, representa un resistor R conectado en paralelo con un inductor, cuya inductancia es $L = \frac{1}{\omega^2 C}$. El circuito eléctrico resultante se

muestra en la figura 4.18b.

Para calcular la potencia que se suministra a la carga eléctrica, es necesario determinar $R_L(\omega)$, la parte real de $Z_L(j\omega)$. De la ecuación (4.34) se obtiene

$$Z_L(j\omega) = \frac{R}{1 - j\omega CR} = \frac{R}{1 - j\omega CR} \frac{1 + j\omega CR}{1 + j\omega CR} = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} + j \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}$$

$$Z_L(j\omega) = R_L(\omega) + jX_L(\omega)$$

Y la máxima potencia promedio es por tanto

$$P \Big|_{\text{máxima}} = \frac{1}{8} \frac{V_m^2}{R_L(\omega)} \quad [\text{W}]$$

Capítulo 5

Bipuertos

Una aplicación que se encuentra frecuentemente en la práctica es el empleo de un instrumento que sirva para transmitir una señal de información. Dicho dispositivo al cual denominaremos red eléctrica de dos puertos o simplemente bipuerto, además de transmitir la señal, algunas veces, la debe amplificar, filtrar o modificar de alguna forma, otras veces también se utilizará para proporcionar un acoplamiento entre la señal de entrada y la señal de salida. La configuración general de un bipuerto se muestra en la figura 5.1a, en la que por conveniencia el subíndice 1 se asigna a las variables del puerto de la entrada y el subíndice 2 a las variables del puerto de la salida.

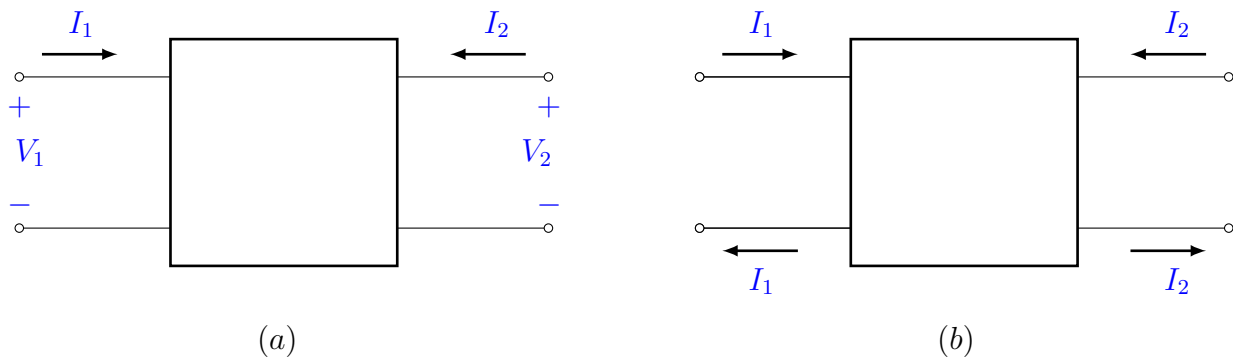


Figura 5.1: (a) Configuración general de un bipuerto. (b) Condición de las corrientes eléctricas de un bipuerto.

Como la configuración general del bipuerto tiene cuatro terminales, en teoría es posible definir una variable para cada una de las corrientes eléctricas en cada terminal. Para eliminar esta posibilidad, cada puerto de la red eléctrica debe satisfacer la siguiente condición: *la corriente que entra a una de las terminales de un puerto es, para todo tiempo, igual a la corriente que sale por la otra terminal del mismo puerto*; tal como muestra la figura 5.1b.

Dado que ahora hay cuatro variables, a saber: I_1 , I_2 , V_1 y V_2 en lugar de las dos variables que se requieren para describir una red eléctrica de un puerto, ahora se requieren dos ecuaciones para relacionarlas. Estas ecuaciones tienen la siguiente forma general

$$\begin{aligned} U_1(s) &= k_{11}(s)W_1(s) + k_{12}(s)W_2(s) \\ U_2(s) &= k_{21}(s)W_1(s) + k_{22}(s)W_2(s) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Donde las variables $U_1(s)$, $U_2(s)$, $W_1(s)$ y $W_2(s)$ pueden ser cualesquiera de las variables $I_1(s)$, $I_2(s)$, $V_1(s)$ o $V_2(s)$. Los $k_{ij}(s)$ se denominan parámetros de la red eléctrica y son funciones de las variables de la red eléctrica que las relacionan. Los posibles valores que pueden tomar $U_1(s)$ y $U_2(s)$ se muestran en la Tabla 5 y son el resultado de las combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos. Una vez que $U_1(s)$ y $U_2(s)$ se especifican, $W_1(s)$ y $W_2(s)$ quedan determinados sin ambigüedad.

Cada caso de la Tabla 5 tiene propiedades específicas que lo hacen diferente de cualquier otro y adecuado para ciertas configuraciones de redes eléctricas. No obstante, se debe recalcar que si se conoce un conjunto de parámetros es posible encontrar otro, si es que éste existe.

— Tabla 5 —				
Caso	$U_1(s)$	$U_2(s)$	$W_1(s)$	$W_2(s)$
1	$V_1(s)$	$V_2(s)$	$I_1(s)$	$I_2(s)$
2	$I_1(s)$	$I_2(s)$	$V_1(s)$	$V_2(s)$
3	$I_1(s)$	$V_2(s)$	$V_1(s)$	$I_2(s)$
4	$V_1(s)$	$I_2(s)$	$I_1(s)$	$V_2(s)$
5	$V_1(s)$	$I_1(s)$	$V_2(s)$	$-I_2(s)$
6	$V_2(s)$	$I_2(s)$	$V_1(s)$	$-I_1(s)$

5.1. Parámetros z o de impedancia de circuito abierto

Consideraremos el primer caso de la Tabla 5, esto es: $V_1(s)$ y $V_2(s)$ para las variables $U_1(s)$ y $U_2(s)$, y para $W_1(s)$ y $W_2(s)$, $I_1(s)$ e $I_2(s)$, respectivamente. Por lo que la ecuación (5.1) resulta tener la siguiente forma

$$\begin{aligned} V_1(s) &= z_{11}(s)I_1(s) + z_{12}(s)I_2(s) \\ V_2(s) &= z_{21}(s)I_1(s) + z_{22}(s)I_2(s) \end{aligned} \quad (5.2)$$

ya que los miembros del lado izquierdo del conjunto resultante tienen dimensiones de voltaje y las variables $W_1(s)$ y $W_2(s)$ tienen dimensiones de corriente, los parámetros $k_{ij}(s)$ deben tener dimensiones de impedancia. La ecuación (5.2) puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}(s)] \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

donde la matriz $[\mathbf{Z}(s)]$ se denomina matriz de parámetros z y sus elementos $z_{ij}(s)$ reciben el nombre de parámetros z .

Para una red eléctrica dada, los parámetros z se pueden determinar aplicando un conjunto de entradas de prueba a la red eléctrica. Para ver esto, considere la primera ecuación de (5.2). Si el puerto de salida de la red eléctrica está en circuito abierto, entonces $I_2(s) = 0$, quedando la ecuación

$$V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) \Big|_{I_2(s)=0} \quad (5.4)$$

recordando que la *función de transferencia* se define como la transformada de Laplace de la señal de salida/la transformada de Laplace de la señal de entrada; la ecuación (5.4) sugiere que debe utilizarse como entrada una fuente de corriente independiente en el puerto de la entrada y considerarse como salida el voltaje en el mismo puerto. Así, el parámetro $z_{11}(s)$ queda definido por la relación

$$z_{11}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \Big|_{I_2(s)=0} \quad (5.5)$$

Un procedimiento similar se puede seguir para calcular $z_{21}(s)$; por lo que

$$z_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \Big|_{I_2(s)=0} \quad (5.6)$$

Los otros dos parámetros $z_{ij}(s)$ restantes, pueden encontrarse aplicando una fuente de corriente independiente en el otro puerto. En la figura 5.2 se muestran las condiciones necesarias para determinar tales parámetros.

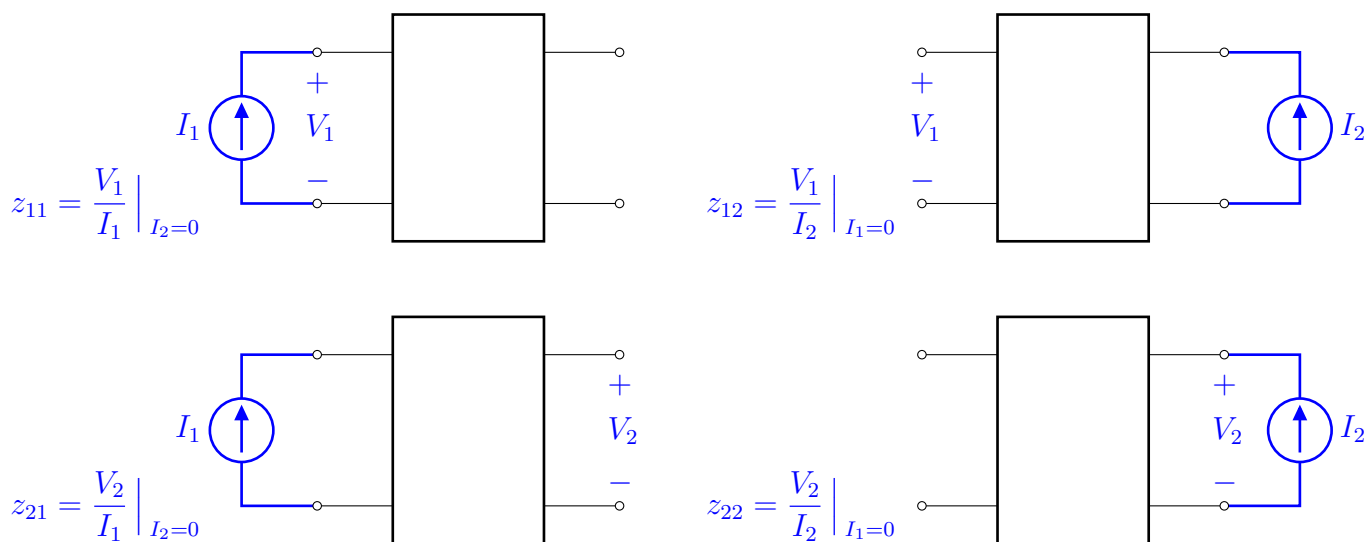


Figura 5.2: Condiciones de prueba para encontrar los parámetros $z_{ij}(s)$.

Ejemplo 5.1 Encuentre la matriz de impedancias de circuito abierto de la red eléctrica que se ilustra en la figura 5.3.

A partir de las condiciones propuestas en la figura 5.2, la matriz de parámetros $z_{ij}(s)$ que se quiere obtener, resulta ser:

$$[\mathbf{Z}(s)] = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 + R_5 \end{bmatrix}$$

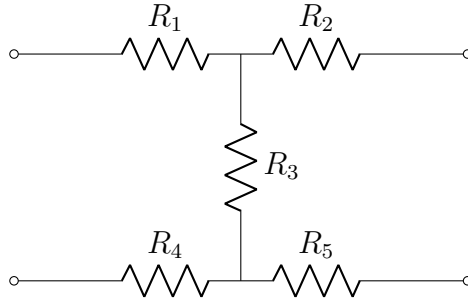


Figura 5.3: Red eléctrica resistiva.

Una propiedad importante de los parámetros, es que si se conocen para una red eléctrica dada, puede determinarse cualquier otra función de red a partir de ellos. Por ejemplo, determinar la función de transferencia de voltaje de circuito abierto $\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$.

La condición de circuito abierto implica que $I_2(s) = 0$, por lo que de la ecuación (5.2) se tiene

$$\begin{aligned} V_1(s) &= z_{11}(s)I_1(s) \\ V_2(s) &= z_{21}(s)I_1(s) \end{aligned} \quad (5.7)$$

de donde

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} \quad (5.8)$$

Otro ejercicio podría ser, determinar la impedancia de entrada $Z_{entrada}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}$ cuando el puerto de salida está en corto circuito.

Si el puerto de salida se encuentra en corto circuito entonces $V_2(s) = 0$ y de la ecuación (5.2) se tiene $z_{21}(s)I_1(s) + z_{22}(s)I_2(s) = 0$, por lo que

$$I_2(s) = -\frac{z_{21}(s)}{z_{22}(s)}I_1(s) \quad (5.9)$$

sustituyendo en la primera ecuación de (5.2), $V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) + z_{12}I_2(s)$

$$Z_{entrada}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = z_{11}(s) - \frac{z_{12}(s)z_{21}(s)}{z_{22}(s)} \quad (5.10)$$

Un procedimiento similar se puede emplear para encontrar cualquier otra función de red deseada.

5.1.1. Bipuertos en serie

En algunas configuraciones de redes eléctricas, es posible simplificar el cálculo de los parámetros, *descomponiendo* la red eléctrica en cuestión, en redes eléctricas más simples. Como ejemplo, considere la composición que se muestra en la figura 5.4 en donde se muestra la conexión de *bipuertos en serie*.

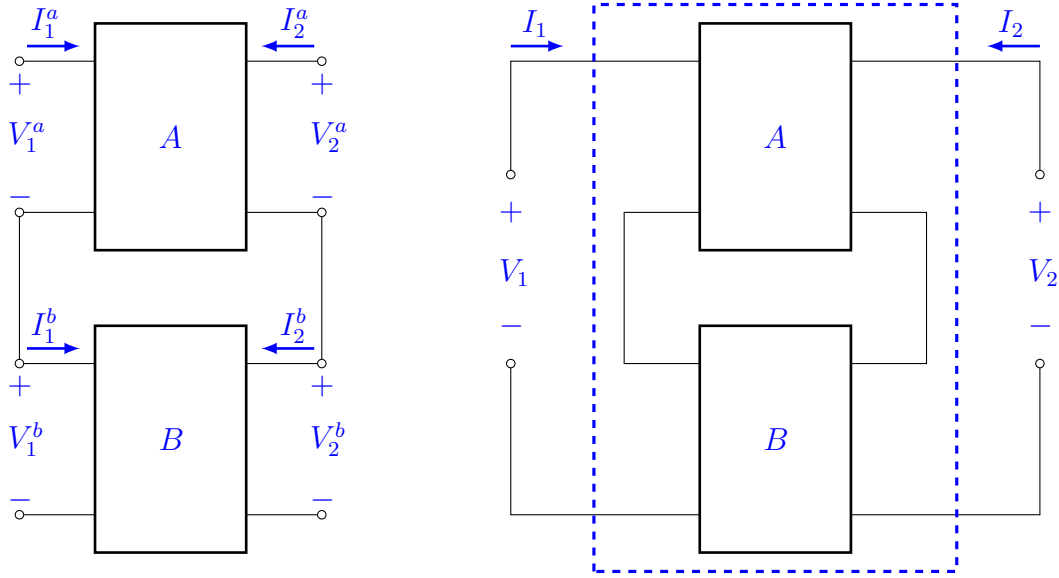


Figura 5.4: Bipuertos conectados en serie.

Para la red eléctrica A con los voltajes y las corrientes eléctricas mostrados, se define un conjunto de parámetros $z_{ij}^a(s)$

$$[\mathbf{V}^a(s)] = \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^a(s) & z_{12}^a(s) \\ z_{21}^a(s) & z_{22}^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}^a(s)] [\mathbf{I}^a(s)] \quad (5.11)$$

Para la red eléctrica B se define, en forma similar, el conjunto de parámetros $z_{ij}^b(s)$

$$[\mathbf{V}^b(s)] = \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^b(s) & z_{12}^b(s) \\ z_{21}^b(s) & z_{22}^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}^b(s)] [\mathbf{I}^b(s)] \quad (5.12)$$

Al aplicar las leyes de Kirchhoff en la figura 5.4, se tiene

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

de las ecuaciones (5.11), (5.12), (5.13) y (5.14), se infiere que

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}^a(s)] \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} + [\mathbf{Z}^b(s)] \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} = \left[[\mathbf{Z}^a(s)] + [\mathbf{Z}^b(s)] \right] \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Se concluye, por consiguiente, para un bipuerto formado por dos bipuertos conectados en serie, sus parámetros $z_{ij}(s)$ pueden encontrarse sumando los parámetros $z_{ij}(s)$ correspondientes de las redes eléctricas que lo constituyen.

Por último, cabe hacer notar, que para una red eléctrica recíproca los elementos $z_{12}(s)$ y $z_{21}(s)$ son iguales y por consiguiente la matriz de parámetros $[\mathbf{Z}(s)]$ es simétrica.

5.2. Parámetros y o de admitancia de corto circuito

Ahora se considera el caso 2 de la Tabla 5, en donde $U_1(s)$ y $U_2(s)$ se identifican con $I_1(s)$ e $I_2(s)$, respectivamente. Así, los parámetros $k_{ij}(s)$ del bipuerto son funciones de red con dimensiones de admitancia, $y_{ij}(s)$ que especifican a las corrientes eléctricas de los puertos como funciones de los voltajes $V_1(s)$ y $V_2(s)$, o sea

$$\begin{aligned} I_1(s) &= y_{11}(s)V_1(s) + y_{12}(s)V_2(s) \\ I_2(s) &= y_{21}(s)V_1(s) + y_{22}(s)V_2(s) \end{aligned} \quad (5.16)$$

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}(s)] \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

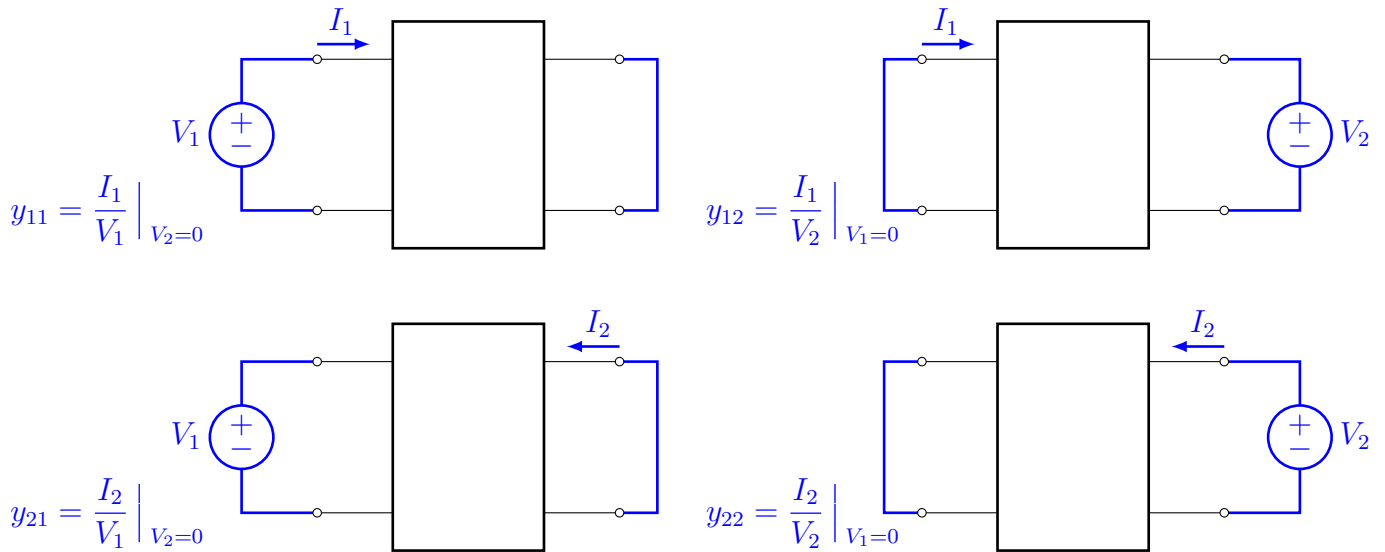


Figura 5.5: Condiciones de prueba para encontrar los parámetros $y_{ij}(s)$.

Dos de los cuatro parámetros, a saber: $y_{11}(s)$ y $y_{21}(s)$ se encuentran aplicando una fuente de voltaje independiente en el puerto 1 y poniendo en corto circuito el puerto 2; se miden las corrientes eléctricas resultantes en cada puerto. Los otros dos parámetros se encuentran en forma similar, se aplica una fuente de voltaje independiente en el puerto 2 y se pone en corto circuito el puerto 1. La figura 5.5 muestra las condiciones para determinar los parámetros $y_{ij}(s)$.

En la sección anterior se mostró que

$$[\mathbf{V}(s)] = [\mathbf{Z}(s)] [\mathbf{I}(s)] \quad (5.18)$$

premultiplicando por la matriz de parámetros $[\mathbf{Y}(s)]$

$$[\mathbf{Y}(s)] [\mathbf{V}(s)] = [\mathbf{I}(s)] = [\mathbf{Y}(s)] [\mathbf{Z}(s)] [\mathbf{I}(s)] \quad (5.19)$$

se concluye

$$[\mathbf{Y}(s)] = [\mathbf{Z}(s)]^{-1} \quad \text{o} \quad [\mathbf{Z}(s)] = [\mathbf{Y}(s)]^{-1} \quad (5.20)$$

5.2.1. Bipuertos en paralelo

De manera similar para el cálculo de los parámetros $z_{ij}(s)$ de bipuertos en serie, es posible simplificar el cálculo de los parámetros $y_{ij}(s)$ cuando la red eléctrica original está conformada por redes eléctricas conectadas en paralelo.

Sea la red eléctrica constituida por dos bipuertos que se presenta en la figura 5.6. Este tipo de estructura recibe el nombre de *bipuertos en paralelo*.

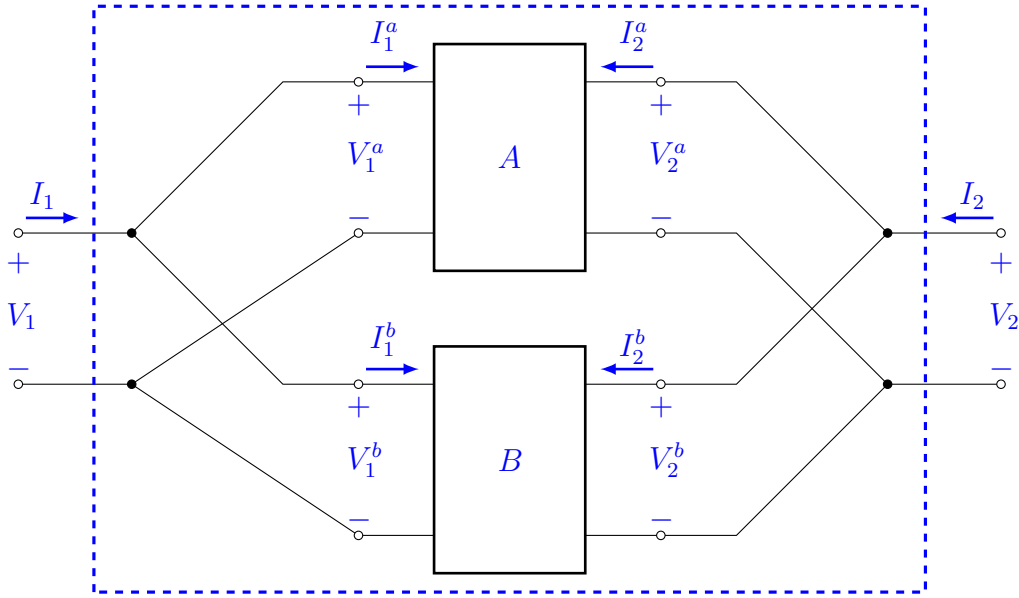


Figura 5.6: Bipuertos conectados en paralelo.

Para el bipuerto A, la matriz de parámetros de corto circuito es

$$\begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^a(s) & y_{12}^a(s) \\ y_{21}^a(s) & y_{22}^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}^a(s)] \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

para el bipuerto B

$$\begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^b(s) & y_{12}^b(s) \\ y_{21}^b(s) & y_{22}^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}^b(s)] \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Aplicando las leyes de Kirchoff a la red eléctrica de la figura 5.6, se tiene

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

considerando las ecuaciones (5.21), (5.22), (5.23) y (5.24)

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}^a(s)] \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} + [\mathbf{Y}^b(s)] \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} = [[\mathbf{Y}^a(s)] + [\mathbf{Y}^b(s)]] \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Así, los parámetros $y_{ij}(s)$ de la red eléctrica original, se pueden determinar sumando los parámetros $y_{ij}(s)$ correspondientes de cada uno de los bipuertos individuales que la componen.

Ejemplo 5.2 Encuentre la función de transferencia de la red eléctrica de la figura 5.7.

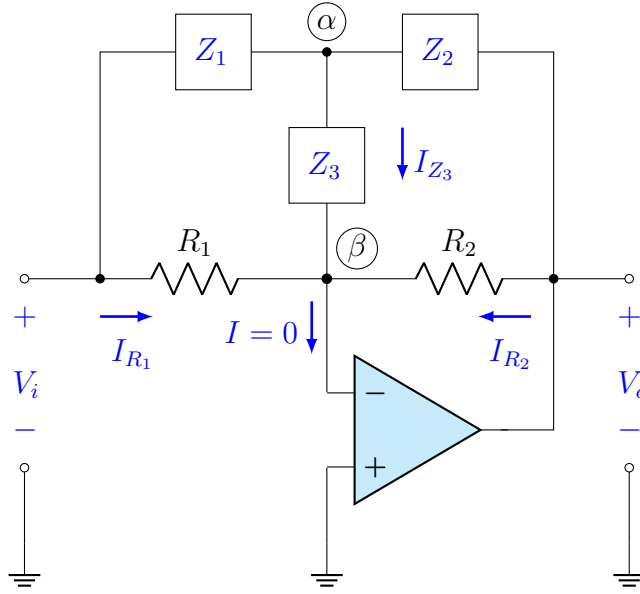


Figura 5.7: Filtro eléctrico activo.

Para determinar la relación que se desea, la red eléctrica se puede considerar que está constituido por dos bipuertos conectados en paralelo.

Teniendo en cuenta las propiedades del amplificados operacional ideal, esto es: ganancia del amplificador infinita, por lo cual el potencial del nodo (ⓑ) es nulo, $V_\beta = 0$; impedancia de entrada del amplificador operacional infinita, lo que implica que la corriente en la entrada inversora es nula, $I = 0$, por consiguiente

$$I_{R_1} + I_{Z_3} + I_{R_2} = I = 0 \quad (5.26)$$

o también

$$\frac{V_i - V_\beta}{R_1} + \frac{V_\alpha - V_\beta}{Z_3} + \frac{V_o - V_\beta}{R_2} = 0 \quad (5.27)$$

Como consecuencia de que $V_\beta = 0$ e $I = 0$, el nodo (ⓑ) se refiere como *tierra virtual*. Considerando lo anterior la red eléctrica de la figura 5.7, se puede rehacer como muestra la figura 5.8.

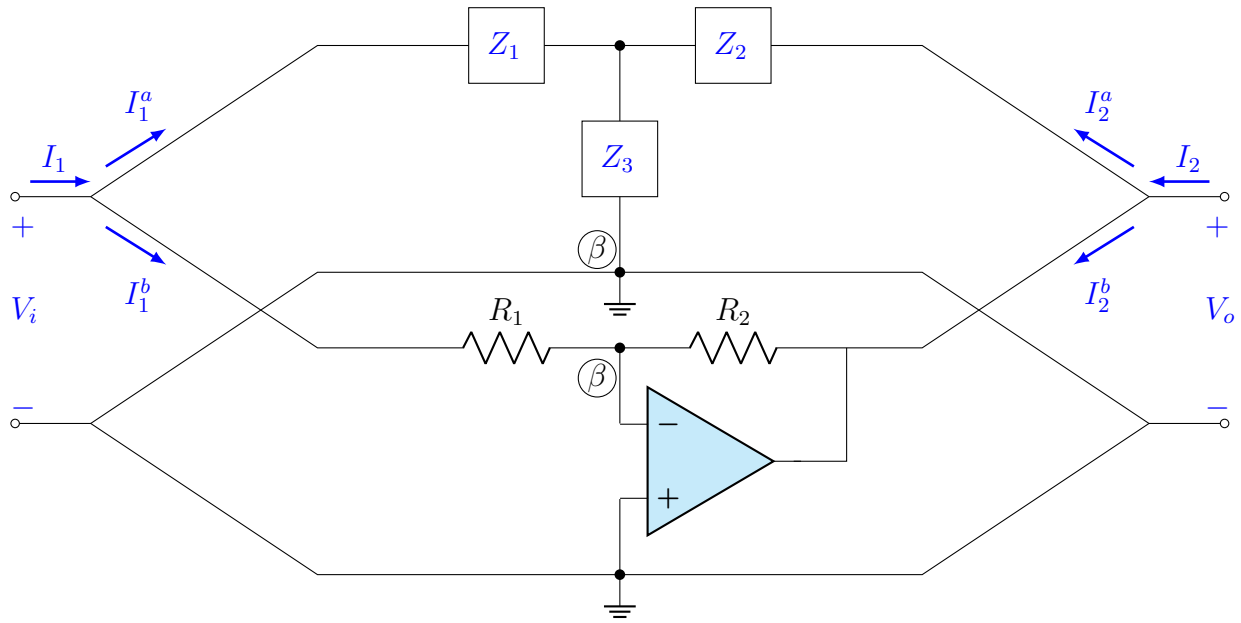


Figura 5.8: El filtro eléctrico activo de la figura 5.7.

Nótese la similitud entre los circuitos de las figuras 5.6 y 5.8. De la ecuación (5.24) podemos escribir para el circuito de la figura 5.8.

$$\begin{aligned} I_1(s) &= I_1^a(s) + I_1^b(s) \\ I_2(s) &= I_2^a(s) + I_2^b(s) \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde

$$\begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^a(s) & y_{12}^a(s) \\ y_{21}^a(s) & y_{22}^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i(s) \\ V_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^a(s) & z_{12}^a(s) \\ z_{21}^a(s) & z_{22}^a(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_i(s) \\ V_o(s) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

y para la red eléctrica activa

$$\begin{aligned} I_1^b(s) &= \frac{V_i(s)}{R_1} = I_{R_1} \\ I_2^b(s) &= \frac{V_o(s)}{R_2} = I_{R_2} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.29) y (5.30) en la (5.28)

$$\begin{aligned} I_1(s) &= y_{11}^a(s)V_1(s) + y_{12}^a(s)V_2(s) + \frac{1}{R_1}V_i(s) \\ I_2(s) &= y_{21}^a(s)V_1(s) + y_{22}^a(s)V_2(s) + \frac{1}{R_2}V_o(s) \end{aligned} \quad (5.31)$$

con la ecuación (5.26) y teniendo en cuenta que $I_{Z_3} = I_1^a + I_2^a$

$$I_1^b(s) + I_1^a(s) + I_2^a(s) + I_2^b(s) = I_1(s) + I_2(s) = 0 \quad (5.32)$$

por lo que

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{y_{11}^a(s) + y_{21}^a(s) + \frac{1}{R_1}}{y_{12}^a(s) + y_{22}^a(s) + \frac{1}{R_2}} \quad (5.33a)$$

ecuación que en función $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ y $Z_3(s)$ resulta

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{\frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} + \frac{1}{R_1}}{\frac{Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} + \frac{1}{R_2}} \quad (5.33b)$$

5.3. Parámetros híbridos

A continuación se presentan dos conjuntos de parámetros que difieren en cuanto a la naturaleza de los vistos en las dos secciones anteriores. Se denominan parámetros g y parámetros h y colectivamente parámetros híbridos. Este nombre resulta apropiado debido a que los elementos individuales de cada conjunto tienen dimensiones diferentes.

5.3.1. Parámetros g

Los parámetros g de un bipuerto son las funciones de red $g_{ij}(s)$ que especifican la corriente eléctrica del puerto 1 y el voltaje del puerto 2 como funciones de las otras variables. La forma general de estas relaciones son

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{G}(s)] \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Dos de los cuatro parámetros se encuentran aplicando una fuente de voltaje independiente como entrada en el puerto 1 y poniendo en circuito abierto el puerto 2. Los otros dos parámetros se encuentran aplicando una fuente de corriente independiente como entrada en el puerto 2 y poniendo en corto circuito el puerto 1. En la figura 5.9 se muestran las condiciones de prueba mencionadas.

A partir de los parámetros $g_{ij}(s)$ es posible encontrar cualquier otro conjunto de parámetros, si tal representación existe. Como ejemplo de lo anterior, a continuación se determina la relación entre los parámetros $g_{ij}(s)$ y los parámetros $y_{ij}(s)$.

De la segunda ecuación de la (5.16)

$$I_2(s) = y_{21}(s)V_1(s) + y_{22}(s)V_2(s) \quad (5.35)$$

despejando a $V_2(s)$

$$V_2(s) = -\frac{y_{21}(s)}{y_{22}(s)}V_1(s) + \frac{1}{y_{22}(s)}I_2(s) \quad (5.36)$$

y comparando con la segunda ecuación de la (5.34)

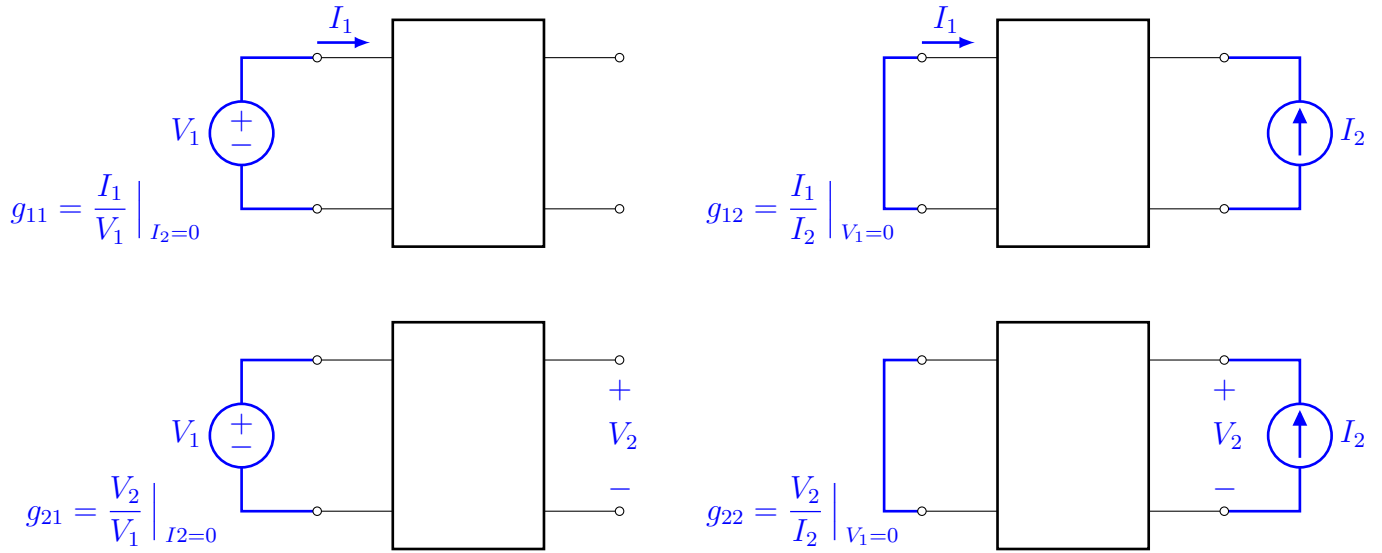


Figura 5.9: Condiciones de prueba para encontrar los parámetros $g_{ij}(s)$.

$$V_2(s) = g_{21}(s)V_1(s) + g_{22}(s)I_2(s) \quad (5.37)$$

se tiene

$$g_{21}(s) = -\frac{y_{21}(s)}{y_{22}(s)} \quad (5.38)$$

y

$$g_{22}(s) = \frac{1}{y_{22}(s)} \quad (5.39)$$

De la primera ecuación de la (5.16)

$$I_1(s) = y_{11}(s)V_1(s) + y_{12}(s)V_2(s) \quad (5.40)$$

sustituyendo la ecuación (5.36) en la ecuación (5.40) y reacomodando términos

$$I_1(s) = \frac{y_{11}(s)y_{22}(s) - y_{12}(s)y_{21}(s)}{y_{22}(s)}V_1(s) + \frac{y_{12}(s)}{y_{22}(s)}I_2(s) \quad (5.41)$$

que tiene la forma de la primera ecuación de la (5.34)

$$I_1(s) = g_{11}(s)V_1(s) + g_{12}(s)I_2(s) \quad (5.42)$$

comparando las ecuaciones (5.41) y (5.42)

$$g_{11}(s) = \frac{y_{11}(s)y_{22}(s) - y_{12}(s)y_{21}(s)}{y_{22}(s)} \quad (5.43)$$

y

$$g_{12}(s) = \frac{y_{12}(s)}{y_{22}(s)} \quad (5.44)$$

Resumiendo, de las ecuaciones (5.38), (5.39), (5.43) y (5.44) se puede escribir

$$\begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{y_{22}(s)} \begin{bmatrix} \det [\mathbf{Y}(s)] & y_{12}(s) \\ -y_{21}(s) & 1 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

donde $\det [\mathbf{Y}(s)] = y_{11}(s)y_{22}(s) - y_{12}(s)y_{21}(s)$.

Es importante acentuar que para una red eléctrica de dos puertos dada, si los parámetros $y_{ij}(s)$ existen, los parámetros $g_{ij}(s)$ también existirán si y solo si $y_{22}(s) \neq 0$.

5.3.2. Parámetros h

Los parámetros h de una red eléctrica de dos puertos son las funciones de red $h_{ij}(s)$ que especifican el voltaje del puerto 1 y la corriente eléctrica del puerto 2 como funciones de las otras variables, es decir de $I_1(s)$ y $V_2(s)$. Las relaciones en forma matricial son

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{H}(s)] \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Dos de los cuatro parámetros se encuentran aplicando una fuente de corriente independiente como entrada en el puerto 1, y poniendo en corto circuito el puerto 2. Los otros dos parámetros se encuentran aplicando una fuente de voltaje independiente de entrada en el puerto 2 y poniendo en circuito abierto el puerto 1. En la figura 5.10 se muestran estas condiciones de prueba.

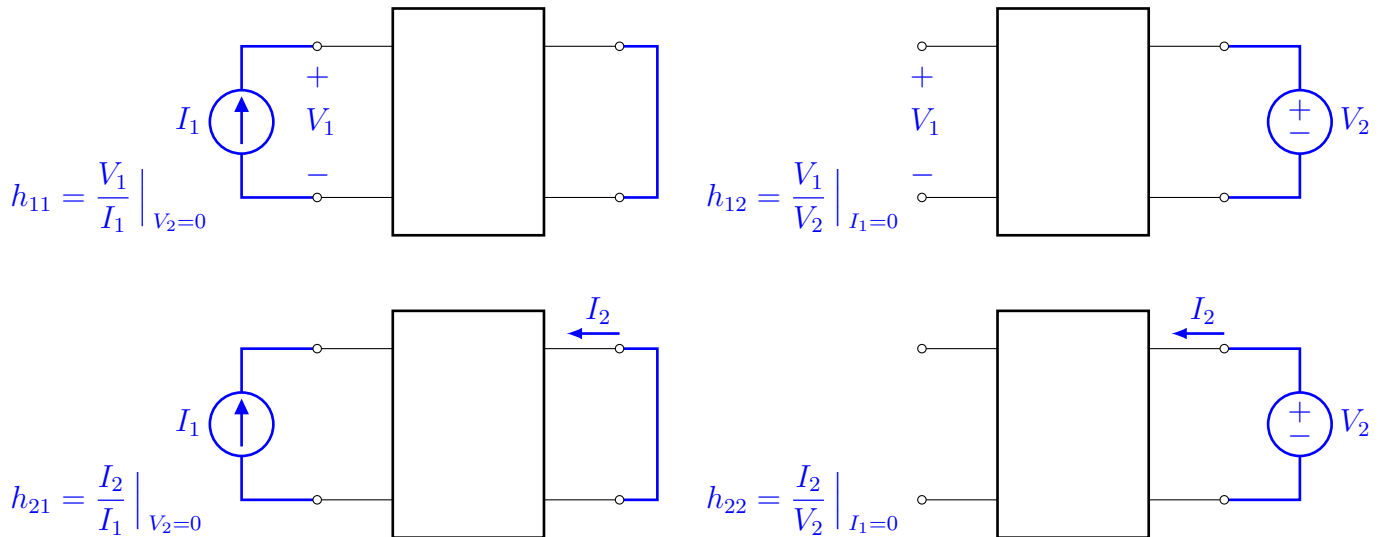


Figura 5.10: Condiciones de prueba para encontrar los parámetros $h_{ij}(s)$.

Si se comparan las ecuaciones (5.34) y (5.46), se infiere que la matriz de parámetros h y la matriz de parámetros g satisfacen la siguiente relación

$$[\mathbf{H}(s)] = [\mathbf{G}(s)]^{-1} \quad \text{o} \quad [\mathbf{G}(s)] = [\mathbf{H}(s)]^{-1} \quad (5.47)$$

5.4. Parámetros de transmisión o parámetros ABCD

A continuación se estudian dos conjuntos de parámetros que difieren totalmente de los que se han visto hasta ahora. La primera diferencia consiste en que $U_1(s)$ y $U_2(s)$ ya no son variables de uno y otro puerto al mismo tiempo. Ahora $U_1(s)$ y $U_2(s)$ representan a $V_1(s)$ e $I_1(s)$ y $W_1(s)$ y $W_2(s)$ corresponden a $V_2(s)$ y $-I_2(s)$. La razón por la que a $I_2(s)$ se le asigna un signo negativo se aclarará más adelante. Los coeficientes $k_{ij}(s)$ de la ecuación (5.1) se indican por los términos $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ y $D(s)$, por lo que

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{T}(s)] \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Para una red eléctrica de dos puertos dada, los parámetros $ABCD$ o de transmisión se pueden determinar aplicando fuentes independientes de entrada de manera semejante a lo que se hizo para encontrar los parámetros de las secciones anteriores. Para ver esto, considere la primera ecuación de la (5.48); si el puerto 2 se pone en circuito abierto, entonces $-I_2(s) = 0$, y por consiguiente

$$V_1(s) = A(s)V_2(s) \quad (5.49)$$

Para realizar una situación de prueba semejante a lo que se hizo antes, se aplicaría una *fente voltaje independiente ideal* en el puerto 2. Se hace énfasis en el término fuente de voltaje independiente ideal, para tener presente que su impedancia es nula y como se ha supuesto que $-I_2(s) = 0$, lo que a su vez implica una impedancia infinita, esta situación ocasiona una incoherencia. Para obviarla, $V_1(s)$ se convierte en la entrada y $V_2(s)$ en la salida. Así, el parámetro $A(s)$ se encuentra a partir de la siguiente expresión

$$\frac{1}{A(s)} = \left. \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \right|_{-I_2(s)=0} \quad (5.50)$$

entonces el parámetro $A(s)$ resulta ser el recíproco de la razón del voltaje de circuito abierto del puerto 2 al voltaje de entrada del puerto 1 de la red eléctrica de dos puertos.

Si ahora se procede a poner en corto circuito el puerto 2, $V_2(s) = 0$, la primera ecuación de la (5.48) es

$$V_1(s) = -B(s)I_2(s) \quad (5.51)$$

sin embargo, si se sigue un razonamiento semejante al realizado para el cálculo de $A(s)$; se concluye que $V_1(s)$ debe ser la entrada y $-I_2(s)$ la respuesta, y por tanto

$$\frac{1}{B(s)} = \left. -\frac{I_2(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (5.52)$$

Para el calcular los parámetros $C(s)$ y $D(s)$, se recurre a la segunda ecuación de la (5.48) y se procede de forma análoga para la determinación de $A(s)$ y $B(s)$, luego

$$\frac{1}{C(s)} = \left. \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \right|_{-I_2(s)=0} \quad (5.53)$$

$$\frac{1}{D(s)} = \left. \frac{-I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (5.54)$$

En la figura 5.11, se muestra las condiciones de prueba para encontrar los elementos que constituyen la matriz de transmisión.

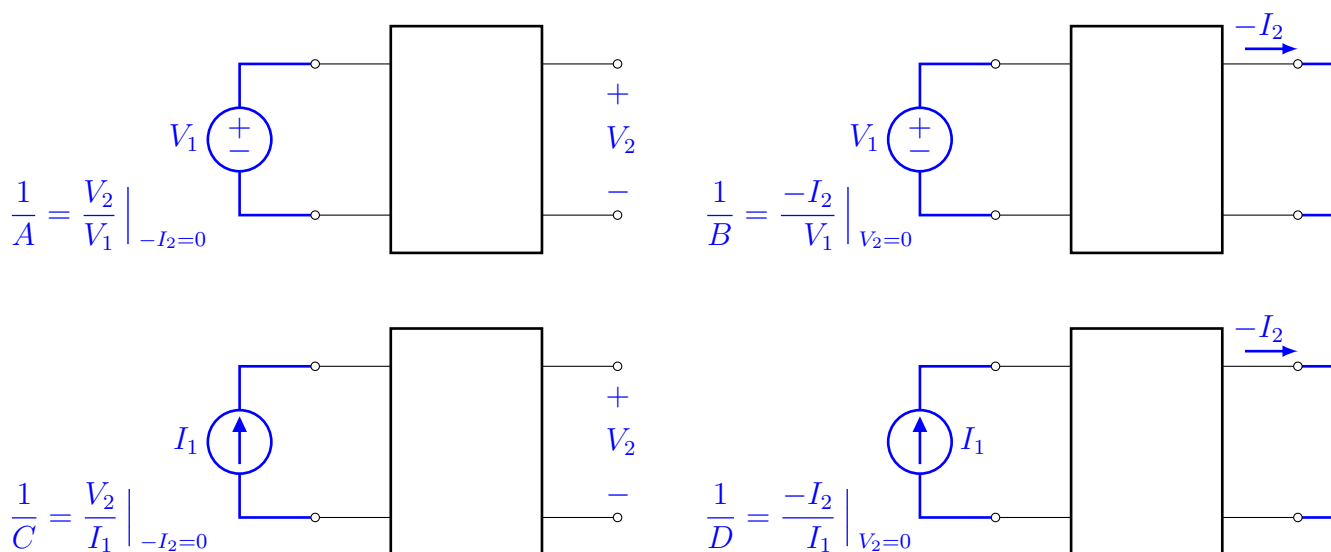


Figura 5.11: Condiciones de prueba para encontrar los parámetros de transmisión o $ABCD$.

A continuación se determina la relación entre los parámetros z y $ABCD$.

Despejando a $V_2(s)$ de la segunda ecuación de la (5.48)

$$V_2(s) = \frac{1}{C(s)}I_1(s) + \frac{D(s)}{C(s)}I_2(s) \quad (5.55)$$

sustituyendo la expresión anterior en la primera ecuación de la (5.48) y reacomodando términos

$$V_1(s) = \frac{A(s)}{C(s)}I_1(s) + \frac{A(s)D(s) - B(s)C(s)}{C(s)}I_2(s) \quad (5.56)$$

de las las ecuaciones (5.3), (5.55) y (5.56), se tiene

$$\frac{1}{C(s)} \begin{bmatrix} A(s) & \det [\mathbf{T}(s)] \\ 1 & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

donde $\det [\mathbf{T}(s)] = A(s)D(s) - B(s)C(s)$.

Vale la pena percatarse de que en las definiciones de los parámetros $ABCD$, cada uno de ellos define una función de transferencia entre una variable del puerto 2 y otra del puerto 1. Es decir, todos los parámetros están relacionados con la transmisión de una señal del puerto 1 al puerto 2; es por esto que se denominan *parámetros de transmisión*.

5.4.1. Bipuertos en cascada

Hay algunas conexiones de redes eléctricas de dos puertos para las cuales los parámetros $ABCD$ de cada una de las redes eléctricas que la integran, pueden emplearse para encontrar la matriz de transmisión de toda la red eléctrica de dos puertos. Para ver esto, considere los dos *bipuertos conectados en cascada* que se muestran en la figura ??.

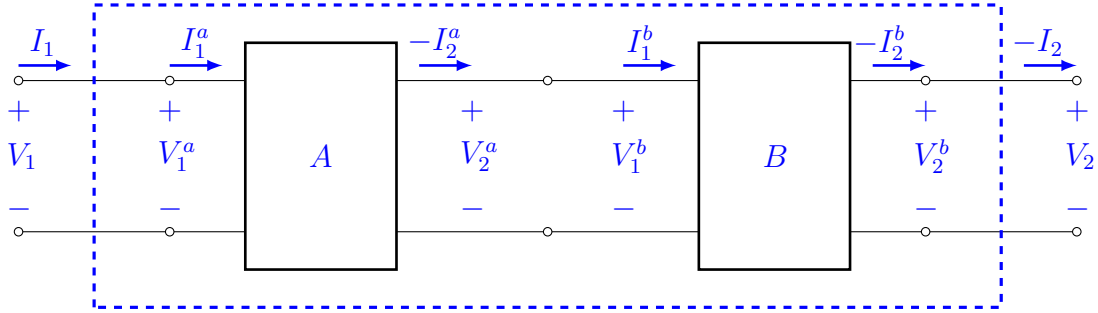


Figura 5.12: Bipuertos conectados en cascada.

Para el bipuerto A

$$\begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ I_1^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^a(s) \\ -I_2^a(s) \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

y para el bipuerto B

$$\begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ I_1^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^b(s) \\ -I_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

En la figura 5.12, es cierto que $V_1(s) = V_1^a(s)$, $I_1(s) = I_1^a(s)$, $V_2^a(s) = V_1^b(s)$, $-I_2^a(s) = I_1^b(s)$, $V_2^b(s) = V_2(s)$ y por último $-I_2^b(s) = -I_2(s)$. Considerando lo anterior y las ecuaciones (5.58) y (5.59); la matriz de transmisión de la red eléctrica de dos puertos formada por los bipuertos A y B es

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Esta característica hace que la matriz de transmisión sea tan ventajosa y fructífera.

Finalmente: ¿Qué se puede decir sobre el sentido o signo negativo de $I_2(s)$?

El último conjunto de parámetros que se presenta, es el que se denomina parámetros $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}$, el cual se define como

$$\begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(s) & \mathcal{B}(s) \\ \mathcal{C}(s) & \mathcal{D}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

esta matriz cuadrada recibe el nombre de matriz de parámetros $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}$ o matriz inversa de los parámetros de transmisión, $T'(s)$. Debido a su poca aplicación en la práctica, únicamente se hace mención de ella.

5.5. Aplicaciones

A continuación, se encuentran algunas *funciones de red* que son de interés en el estudio, el análisis y la síntesis de las redes eléctricas.

Considere el circuito eléctrico de la figura 5.13

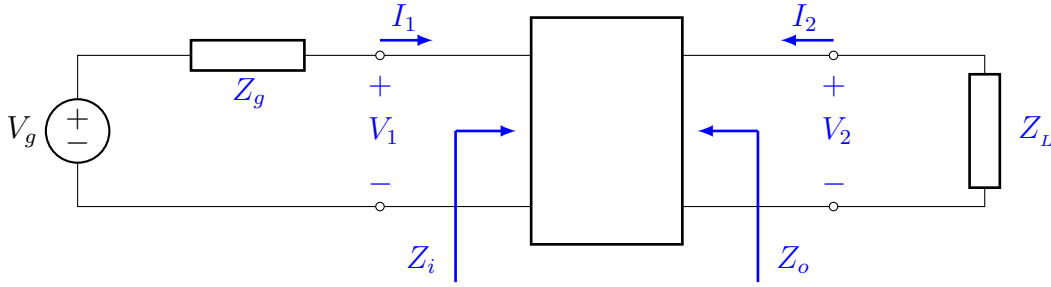


Figura 5.13: Bipoerto conectado a una fuente de voltaje independiente y a una carga eléctrica.

La primera función de red que se determina es la *impedancia de entrada* $Z_i(s)$, esto es, la impedancia vista desde la fuente de voltaje independiente $V_g(s)$ con una impedancia interna $Z_g(s)$, cuando una carga eléctrica $Z_L(s)$ está conectada al puerto de salida. Conocer $Z_i(s)$ es importante, ya que permite hacer una evaluación de la eficiencia en la potencia que se suministra a la carga eléctrica. De la figura 5.13 se obtiene

$$V_2(s) = -Z_L(s)I_2(s) \quad (5.62)$$

sustituyendo la ecuación (5.62) en la (5.16) y acomodando términos, resulta

$$Z_i(s) \triangleq \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = \frac{y_{22}(s) + Y_L(s)}{\det [\mathbf{Y}(s)] + y_{11}(s)Y_L(s)} \quad (5.63)$$

donde

$$Y_L(s) = \frac{1}{Z_L(s)}$$

La segunda función de red que se encuentra es la impedancia que se observa desde la carga eléctrica, cuando una fuente de voltaje independiente con impedancia interna $Z_g(s)$ se conecta al puerto de entrada de la red eléctrica. Esta impedancia a la que se representa por $Z_o(s)$ permite evaluar la impedancia de acoplamiento que se conecta al puerto de salida de la red eléctrica. Para su cálculo, es necesario cancelar la fuente independiente $V_g(s)$; por tanto

$$V_1(s) = -Z_g(s)I_1(s) \quad (5.64)$$

después de sustituir la expresión anterior en la ecuación (5.16) y reacomodando términos

$$Z_o(s) \triangleq \frac{V_2(s)}{I_2(s)} = \frac{y_{11}(s) + Y_g(s)}{\det [\mathbf{Y}(s)] + y_{22}(s)Y_g(s)} \quad (5.65)$$

donde

$$Y_g(s) = \frac{1}{Z_g(s)}$$

Ahora se determina la *función de transferencia* de las corrientes eléctricas, que se define como

$$H_i(s) \triangleq \frac{-I_2(s)}{I_1(s)} \quad (5.66)$$

con la ecuación (5.62) en la segunda ecuación de la (5.2)

$$V_2(s) = z_{21}(s)I_1(s) + z_{22}(s)I_2(s) = -Z_L(s)I_2(s) \quad (5.67)$$

que implica

$$H_i(s) = \frac{-I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{z_{21}(s)}{z_{22}(s) + Z_L(s)} \quad (5.68)$$

Finalmente, se obtiene la función de transferencia de los voltajes, $H_v(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$, para lo cual se sustituye (5.62) en la segunda ecuación de la (5.16), entonces

$$H_v(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{-y_{21}(s)}{y_{22}(s) + Y_L(s)} \quad (5.69)$$

Ejemplo 5.3 Obtenga la matriz de admitancias de corto circuito del bipuerto lineal e invariante en el tiempo que se muestra en la figura 5.14

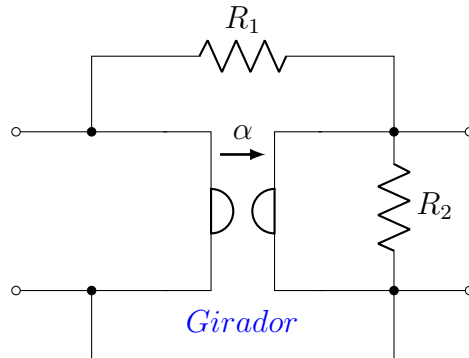


Figura 5.14: Bipuerto lineal e invariante en el tiempo.

Por definición, un *girador* es una red eléctrica de dos puertos o bipuerto. En la figura ?? se muestra su representación simbólica y la relación entre las variables eléctricas de sus puertos.

Al aplicar una fuente independiente de voltaje en uno de los puertos y cortocircuitando el otro, es posible encontrar los parámetros de corto circuito que se buscan.

En la figura 5.16a, $v_2 = 0$ por lo que $i_1 = 0$ y

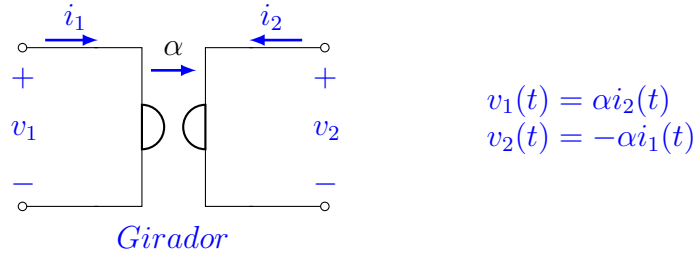


Figura 5.15: Representación simbólica de un girador. La constante α recibe el nombre de *giro*.

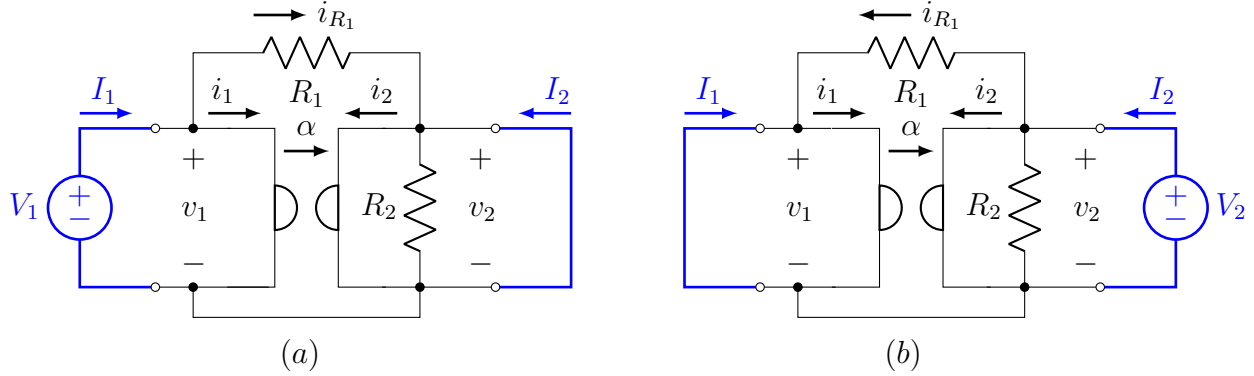


Figura 5.16: Condiciones de prueba para la obtención de los parámetros y_{ij} .

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i_1 + i_{R_1}}{V_1} = \frac{\frac{V_1}{R_1}}{V_1} = \frac{1}{R_1}$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i_2 - i_{R_1}}{V_1} = \frac{\frac{V_1}{\alpha} - \frac{V_1}{R_1}}{V_1} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{R_1}$$

De manera similar, en la figura 5.16b, si $v_1 = 0$, entonces $i_2 = 0$. Por consiguiente

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{v_1=0} = \frac{i_1 - i_{R_1}}{V_2} = \frac{-\frac{V_2}{\alpha} - \frac{V_2}{R_1}}{V_2} = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{R_1}\right)$$

$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{v_1=0} = \frac{i_{R_1} + \frac{V_2}{R_2}}{V_2} = \frac{\frac{V_2}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}}{V_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

finalmente

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{R_1}\right) \\ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$$

Bibliografía

- [1] Desoer, C. A. and Kuh, E. S. (1969) *Basic circuit theory*, McGraw-Hill.
- [2] Johnson, D. E., Hilburn, J. L. and Johnson, J. R. (1986) *Basic electric circuit analysis*, Prentice-Hall.
- [3] Gerez, V. G. and Muray M. A. L. (1972) *Teoría de sistemas y circuitos*, Representaciones y servicios de ingeniería.
- [4] Sánchez, V. M. E. and Salvá, A. C. (2016) *Prácticas del laboratorio de análisis y circuitos eléctricos*, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- [5] Greiser, V. G. and de Gerez, V. C. (1972) *Teoría de sistemas y circuitos*, Representaciones y servicios de ingeniería.
- [6] Budak, A. (1978) *Circuit theory fundamentals and applications*, Prentice-Hall.
- [7] Huelsman, L.P. (1972) *Basic circuit theory: with digital computations*, Prentice-Hall
- [8] Bobrow, L. S. (1987) *Elementary linear circuit analysis*, Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- [9] Dorf, R. and Svoboda, J. (2015) *Circuitos Eléctricos*, Alphaomega Editorial.