Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

División de Ingeniería Eléctrica

Ingeniería de Control y Robótica

Análisis de Circuitos Eléctricos

Clave (1546)

Notas de clase

Elaborado por
Víctor Manuel Sánchez Esquivel

31 de julio de 2019

Sistemas eléctricos

Víctor Manuel Sánchez Esquivel

Índice general

1.1. Circuitos eléctricos de parámetros concentrados . . . 3
1.1.1. Direcciones de referencia . . . 3
1.1.2. Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) . . . 4
1.1.3. Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) . . . 4
1.1.4. Fuente de voltaje . . . 4
1.1.5. Fuente de corriente . . . 4
1.1.6. Circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton . . . 5
1.2. Potencia y energía . . . 7
1.3. Una breve descripción de sistema . . . 7
1.4. Concepto de impedancia y admitancia en el dominio de la variable compleja s . . . 10

1.1. Circuitos eléctricos de parámetros concentrados

Se denomina circuito eléctrico de parámetros concentrados a la interconexión de elementos eléctricos cuyas dimensiones físicas son despreciables comparadas con la longitud de onda de la frecuencia normal de operación.[1]

En los elementos eléctricos de parámetros concentrados, la corriente eléctrica que circula a través de él y el voltaje en sus terminales se encuentran bien definidos.

En un circuito eléctrico de parámetros concentrados los elementos de dos terminales se denominan *ramas* y las terminales de los elementos *nodos*.

1.1.1. Direcciones de referencia

Considere el elemento eléctrico de parámetros concentrados de dos terminales que se muestra en la figura 1.1.

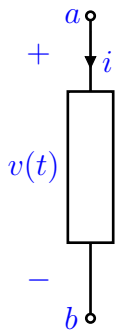

Figura 1.1: Elemento de parámetros concentrados de dos terminales con direcciones de referencia asociadas.

Por convención el *voltaje de la rama* v es positivo en el tiempo t [esto es, $v(t) > 0$], siempre que el potencial del nodo a en el tiempo t sea mayor que el potencial del nodo b en el tiempo t, medidos ambos potenciales con respecto a una referencia común. Si estos potenciales se representan por v_a y v_b, respectivamente, entonces

$$v(t) = v_a(t) - v_b(t) \tag{1.1}$$

Por convención la corriente de rama i es positiva en el tiempo t [esto es, $i(t) > 0$] siempre que un flujo neto de cargas positivas entre en la rama en el nodo a y salga por el nodo b.

Aunque estas direcciones de referencia son arbitrarias, es conveniente trabajar con las *llamadas direcciones de referencia asociadas*. Se dice que la dirección de referencia del voltaje de rama y la dirección de referencia de la corriente eléctrica están asociadas si una corriente positiva entra a la rama por la terminal con el signo positivo y la abandona por la terminal con el signo negativo.

[1] La distancia entre puntos adyacentes correspondientes sobre una onda se conoce como la longitud de onda y se denota por $\lambda = \frac{c}{f}$, donde c indica la velocidad de la luz y f la frecuencia.

1.1.2. Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK)

En un circuito eléctrico de parámetros concentrados, en cualquiera de sus nodos, en todo tiempo, la suma algebraica de las corrientes eléctricas de rama es cero.

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

1.1.3. Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK)

En un circuito eléctrico de parámetros concentrados, en cualquiera de sus trayectorias cerradas, en todo tiempo, la suma algebraica de los voltajes de rama es cero.

$$\sum_{k=1}^{m} v_k = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

1.1.4. Fuente de voltaje

Un elemento de dos terminales se denomina *fuente de voltaje independiente* si mantiene un voltajes $v_s(t)$ en las terminales del circuito eléctrico arbitrario al cual está conectado; esto es, para cualquier corriente $i(t)$ que fluya a través de la fuente, el voltaje en sus terminales es $v_s(t)$. A partir de su definición, una fuente de voltaje tiene una característica en el tiempo t que consiste de una línea recta paralela al eje i en la ordenada $v_s(t)$ en el plano vi, como se muestra en la figura 1.2.

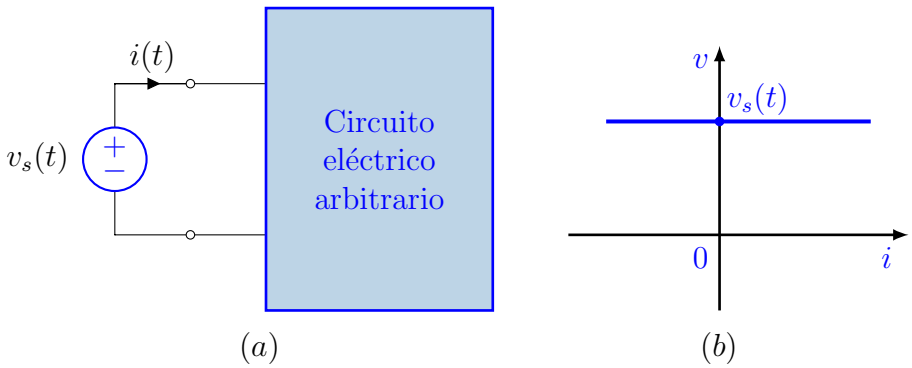

Figura 1.2: (a)Fuente de voltaje independiente conectada a un circuito eléctrico arbitrario. (b) Característica en el tiempo t de la fuente de voltaje independiente.

Es importante recalcar que en el mundo físico no existe la fuente de voltaje independiente como tal y que una representación más precisa al referirse a ella sería: fuente de voltaje independiente *ideal*.

1.1.5. Fuente de corriente

Un elemento de dos terminales se denomina fuente de corriente independiente si mantiene una corriente eléctrica $i_s(t)$ que fluya en las terminales del circuito eléctrico arbitrario al cual está conectado; esto es, para cualquier voltaje $v(t)$, en las terminales del circuito, la corriente fluye hacia él es $i_s(t)$. En el tiempo t la característica de la fuente de corriente independiente es una línea vertical de abscisa $i_s(t)$, como se aprecia en a la figura 1.3.

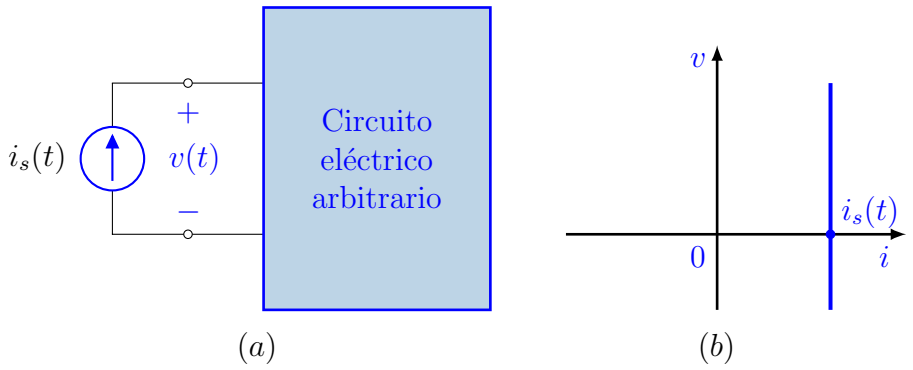

Figura 1.3: (a)Fuente de corriente independiente conectada a un circuito eléctrico arbitrario. (b) Característica en el tiempo t de la fuente de corriente independiente.

1.1.6. Circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton

En la solución de problemas, frecuentemente es más conveniente utilizar fuentes de voltaje que fuentes de corriente o viceversa, es decir, emplear fuentes de corriente en vez de las de voltaje. Los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton nos proporcionan esta flexibilidad.

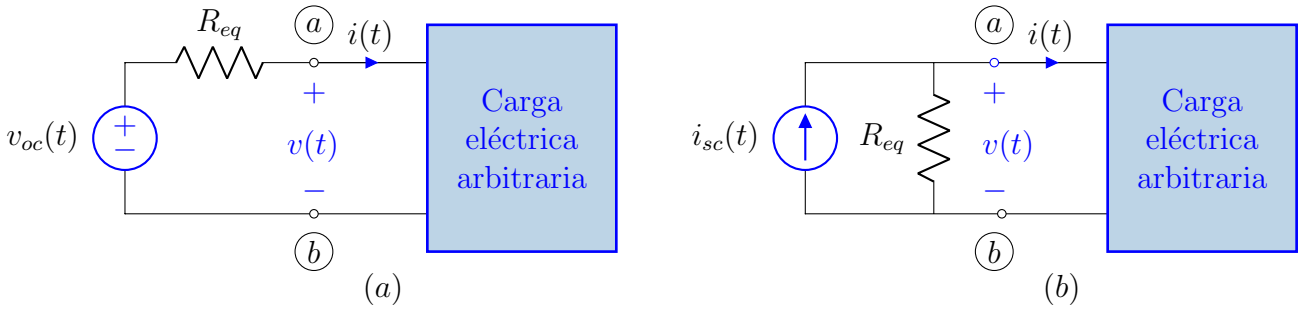

Figura 1.4: (a) Circuito equivalente de Thévenin. (b) Circuito equivalente de Norton.

Esta posibilidad de sustitución de circuitos equivalentes, sustenta que cualquier red eléctrica lineal de dos terminales constituida por resistores y fuentes, sin importar que tan compleja sea, puede representarse ya sea por una fuente de voltaje en serie con un resistor o una fuente de corriente en paralelo con un resistor. La primera representación se denomina circuito equivalente de Thévenin y la última circuito equivalente de Norton. Ambas se muestran en la figura 1.4.

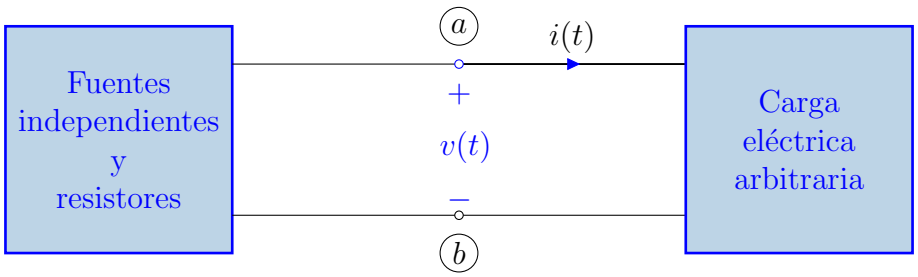

Figura 1.5: *Red eléctrica lineal* conectada a una carga eléctrica arbitraria.

Para determinar tales equivalentes, considere la *red eléctrica lineal* integrada únicamente por fuentes independientes y resistores conectada a una carga arbitraria como se muestra en la figura 1.5.

En ambos circuitos equivalentes, el resistor R_{eq} es el mismo. Su valor se obtiene de la red eléctrica original *al cancelar todas las fuentes independientes*; esto es, *se sustituyen las fuentes de voltaje por corto circuitos y las fuentes de corriente por circuitos abiertos*. A continuación se determina o se mide la resistencia "vista"desde los nodos ⓐ y ⓑ como se ilustra en la figura 1.6.

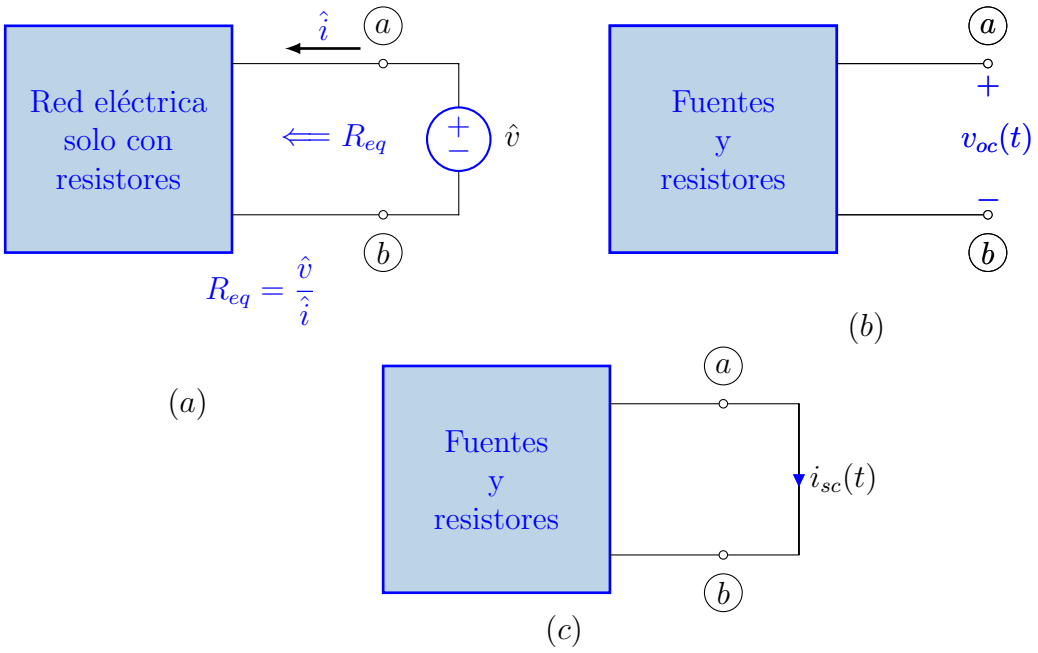

Figura 1.6: (*a*) Cálculo de la resistencia R_{eq}. (*b*) Obtención del voltaje de circuito abierto v_{oc}. (*c*) Obtención de la corriente de corto circuito i_{sc}.

El valor de la fuente de voltaje del circuito equivalente de Thévenin, es el de la diferencia de potencial entre los nodos ⓐ y ⓑ cuando se desconecta la carga arbitraria, es decir el voltaje de circuito abierto, esto es $v_{ab} = v_{oc}$. Esto se muestra en la figura 1.6*b*. El valor de la fuente de corriente del circuito equivalente de Norton, es el de la corriente que fluye del nodo ⓐ hacia el nodo ⓑ cuando se pone en corto circuito la carga arbitraria, i_{sc}. La figura 1.6*c* ilustra esta idea.

Es importante advertir que para los procedimientos presentados, se cumple que

$$v_{oc}(t) = R_{eq} i_{sc}(t) \tag{1.4}$$

o también

$$i_{sc}(t) = G_{eq} v_{oc}(t) \tag{1.5}$$

donde

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} \tag{1.6}$$

El parámetro G se denomina *conductancia eléctrica* y se mide en *siemes* $[S]$.

1.2. Potencia y energía

Considere la red eléctrica que se muestra en la figura 1.7. La energía por unidad de tiempo o potencia que suministra el generador a la red de un puerto,[2] en el tiempo t, es igual al producto del voltaje de puerto $v(t)$ y la corriente de puerto $i(t)$, con las direcciones de referencia asociadas como se muestra en la figura 1.7. Así

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{1.7}$$

cuando $i(t)$ está en amperes y $v(t)$ está en volts, $p(t)$ se mide en watts.

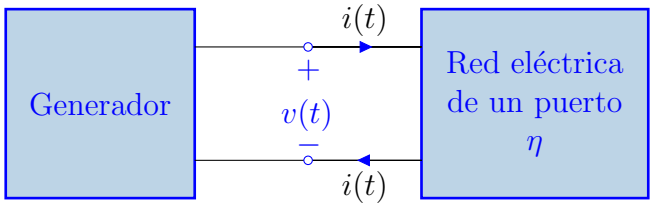

Figura 1.7: Potencia instantánea que se entrega a la red eléctrica de un puerto en el tiempo t es $p(t) = v(t)i(t)$

.

La energía es la integral de la potencia, por lo que la energía suministrada por el generador a la red eléctrica de un puerto desde el tiempo t_0 al tiempo t es

$$W(t, t_0) \triangleq \int_{t_0}^{t} p(t')\mathrm{d}t' = \int_{t_0}^{t} v(t')i(t')\mathrm{d}t' \tag{1.8}$$

Si las direcciones de referencia están asociadas, es decir, que la corriente fluye de un punto de mayor potencia a otro de menor potencia, un elemento de dos terminales es *pasivo* si y sólo si

$$p(t) \geqslant 0 \qquad \forall\, t \tag{1.9}$$

Lo anterior significa que un elemento pasivo nunca proporciona energía al mundo exterior. Asimismo, cuando un elemento no es pasivo, se dice que es *activo*.

Finalmente, ya que en este programa se estudian principalmente las redes eléctricas lineales, invariantes en el tiempo, de parámetros concentrados y dinámicas; es conveniente recordar estos conceptos.

1.3. Una breve descripción de sistema

Un sistema se puede considerar a un transductor que opera sobre la señal de la entrada para producir la señal de la salida, como se muestra en la figura 1.8.

Un *sistema dinámico* (*red eléctrica dinámica*) es aquel en el que la respuesta en algún tiempo depende del valor presente de la entrada y de algunos valores anteriores de la entrada. Un sistema

[2]Una red de un puerto es cualquier red que no contiene fuentes independientes y de la cual sólo un par de terminales se emplean para aplicar una entrada y medir una respuesta.

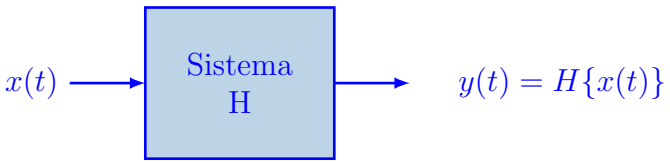

Figura 1.8: Sistema de una sola entrada, $x(t)$ y un sola salida , $y(t)$.

que contiene un elemento que almacena energía y un elemento que disipa energía es un sistema dinámico.

Un *sistema lineal* satisface el principio de superposición. Esto es, un sistema descrito por

$$y(t) = H\{x(t)\} \tag{1.10}$$

es lineal si y sólo si

$$H\{\alpha x_a(t) + \beta x_b(t)\} = \alpha H\{x_a(t)\} + \beta H\{x_b(t)\} \tag{1.11}$$

donde α y β son dos números reales diferentes de cero.

Si $x_b(t) = 0$

$$H\{\alpha x_a(t)\} = \alpha H\{x_a(t)\} \qquad \textit{Homogeneidad} \tag{1.12}$$

Si $\alpha = \beta = 1$

$$H\{x_a(t) + x_b(t)\} = H\{x_a(t)\} + H\{x_b(t)\} \qquad \textit{Aditividad} \tag{1.13}$$

Un sistema invariante en el tiempo es aquel en el cual la forma de onda de la respuesta depende de la forma de onda de la entrada y no del instante en que se aplica la entrada. Un sistema descrito por la ecuación (1.10) es invariante en el tiempo si sólo si

$$y(t \pm \tau) = H\{x(t \pm \tau)\} \tag{1.14}$$

Ejemplo 1.1 Determine las corrientes eléctricas en los resistores del circuito que se muestra en la figura 1.9.

Considerando las direcciones de referencia asociadas y aplicando las leyes de Kirchhoff en el circuito eléctrico de la figura 1.10, se obtienen las siguientes ecuaciones.

De la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK):

En el nodo ①:

$$-j_1 + j_3 + j_6 = 0 \tag{1.15}$$

En el nodo ②:

$$-i_s + j_1 + j_2 + j_5 = 0 \tag{1.16}$$

En el nodo ③:

$$-j_2 + j_4 - j_6 = 0 \tag{1.17}$$

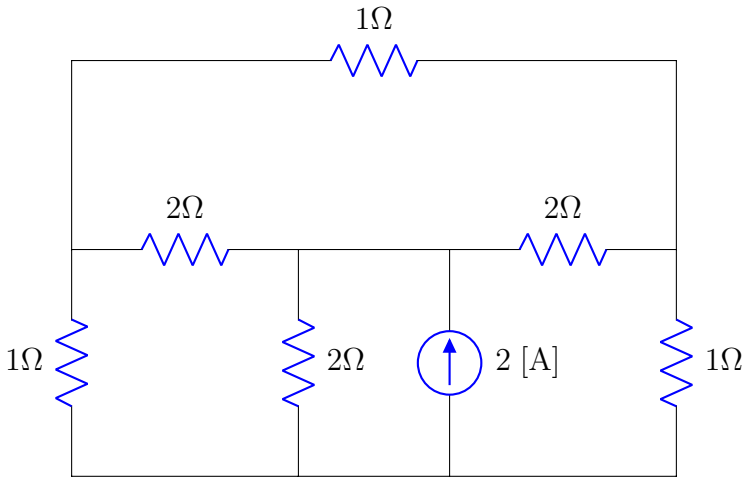

Figura 1.9: Circuito eléctrico constituido por una fuente de corriente independiente y resistores.

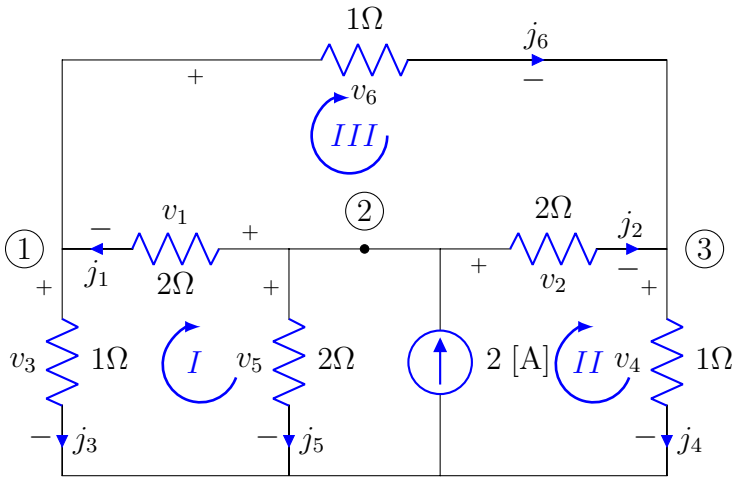

Figura 1.10: Circuito eléctrico resistivo con una fuente de corriente independiente.

De la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) y recorriendo las mallas en sentido de las manecillas del reloj:

En la malla I:

$$v_1 + v_3 - v_5 = 2\,j_1 + 1\,j_3 - 2\,j_5 = 0 \tag{1.18}$$

En la malla II:

$$-v_2 - v_4 + v_5 = -2\,j_2 - 1\,j_4 + 2\,j_5 = 0 \tag{1.19}$$

En la malla III:

$$-v_1 + v_2 - v_6 = -2\,j_1 + 2\,j_2 - 1\,j_6 = 0 \tag{1.20}$$

De la ecuación (1.20) en (1.19)

$$2\,j_1 + j_4 + j_6 = 2\,j_5 \tag{1.21}$$

comparando las ecuaciones (1.18) y (1.21)

$$j_3 = j_4 + j_6 \tag{1.22}$$

(1.17) en (1.22)

$$j_3 = j_2 + j_6 + j_6 = j_2 + 2\,j_6 \tag{1.23}$$

de (1.15) y (1.23)

$$j_3 = j_1 - j_6 = j_2 + 2\,j_6 \qquad \therefore \qquad j_1 = j_2 + 3\,j_6 \tag{1.24}$$

(1.24) en (1.20)

$$-2\,(j_2 + 3\,j_6) + 2\,j_2 - j_6 = -7\,j_6 = 0 \qquad \therefore \qquad j_6 = 0 \tag{1.25}$$

así, en (1.24)

$$j_1 = j_2 \tag{1.26}$$

De (1.15) y (1.17) con (1.26)

$$j_1 = j_2 = j_3 = j_4 \tag{1.27}$$

De (1.18) o de (1.19)

$$3\,j_1 = 2\,j_5 \tag{1.28}$$

(1.27) y (1.28) en (1.16)

$$i_s = j_1 + j_1 + \frac{3}{2} j_1 = \frac{7}{2} j_1 \tag{1.29}$$

entonces

$$j_1 = j_2 = j_3 = j_4 = \frac{2}{7} i_s = \frac{4}{7}\ [\mathrm{A}] \tag{1.30}$$

de la ecuación (1.28)

$$j_5 = \frac{3}{2} j_1 = \frac{6}{7}\ [\mathrm{A}] \tag{1.31}$$

1.4. Concepto de impedancia y admitancia en el dominio de la variable compleja s

En el dominio del tiempo las leyes de Kirchhoff de corriente y de voltaje son:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{en todo nodo} \\ &\sum_{k=1}^{m} v_k(t) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{en toda malla} \end{aligned} \tag{1.32}$$

Si $I(s)$ es la transformada de Laplace de $i(t)$ y $V(s)$ es la transformada de Laplace de $v(t)$. En consecuencia, se puede asentir que la transformadas de Laplace de las leyes de Kirchhoff también satisfacen:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} I_k(s) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\sum_{k=1}^{m} V_k(s) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.33}$$

Adicionalmente, en el dominio del tiempo las variables de corriente eléctrica y de voltaje en un resistor están relacionadas por (Ley de Ohm)

$$v(t) = R\, i(t) \tag{1.34}$$

La transformada de Laplace de la ecuación anterior resulta

$$V(s) = R\, I(s) \tag{1.35}$$

Se concluye entonces que en el dominio de la frecuencia el voltaje en un resistor es proporcional a la corriente eléctrica que fluye a través de él. El factor R se denomina la *impedancia* o resistencia del resistor, sus unidades son el ohm, [Ω]. De igual forma, el reciproco de este parámetro $1/R = G$ se denomina *admitancia* o conductancia del resistor, se mide en siemens, [S].

En el dominio del tiempo, las variables de corriente eléctrica y voltaje en el capacitor están relacionadas por

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{1.36}$$

o

$$v(t) = v(0^-) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.37}$$

La transformada de Laplace de la ecuación (1.36) es

$$I(s) = C\left[sV(s) - v(0^-)\right] \tag{1.38}$$

ecuación que se puede escribir como

$$V(s) = \frac{v(0^-)}{s} + \frac{1}{sC}I(s) \tag{1.39}$$

Las ecuaciones (1.38) y (1.39) son aseveraciones equivalentes. En particular, si el valor inicial del voltaje en el capacitor es cero, la ecuación (1.39) se reduce a

$$V(s) = \frac{1}{sC}\, I(s) \tag{1.40}$$

De esta manera, en el dominio de la frecuencia, el voltaje del capacitor con un *un voltaje inicial nulo* se encuentra multiplicando la corriente a través de él por el parámetro $1/sC$. Este factor $1/sC$, se denomina la *impedancia* del capacitor, y su recíproco, sC, recibe el nombre de la *admitancia* del capacitor.

En el dominio del tiempo, las variables de voltaje y corriente eléctrica en un inductor se relacionan por

$$V(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{1.41}$$

o

$$i(t) = i(0^-) + \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.42}$$

De la transformada de Laplace a la ecuación (1.41), se obtiene

$$V(s) = L\left[sI(s) - i(0^-)\right] \tag{1.43}$$

o

$$I(s) = \frac{i(0^-)}{s} + \frac{V(s)}{L} \tag{1.44}$$

En particular, si el valor inicial de la corriente eléctrica en el inductor es cero, la ecuación (1.43), se convierte en

$$V(s) = sL\, I(s) \tag{1.45}$$

En el dominio de la frecuencia, por consiguiente, el voltaje en un inductor con *corriente inicial nula* se obtiene multiplicando la corriente en él por sL. Este término sL es nombrado la *impedancia* del inductor y $1/sL$ la *admitancia* del inductor.

En la figura 1.11, se presenta un compendio de las relaciones en los dominios del tiempo y de la frecuencia, hasta ahora vistos.

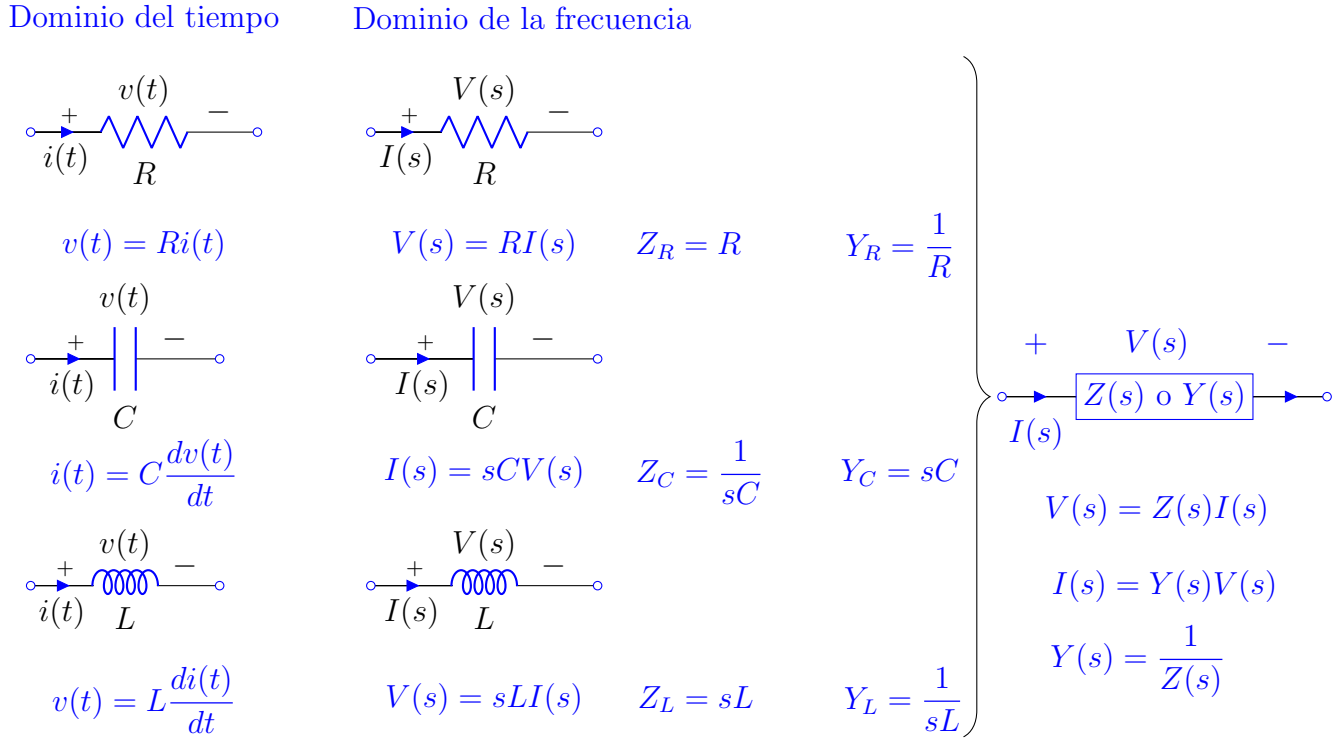

Figura 1.11: Relación voltaje-corriente, en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

Se acostumbra representar la impedancia por el símbolo $Z(s)$ y a la admitancia por el símbolo $Y(s)$. Debe ser claro que tales relaciones son recíprocas, es decir

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} \quad Z(s)Y(s) = 1 \tag{1.46}$$

En el mismo orden de ideas, se puede asentir que sólo se requiere una ecuación, $V(s) = Z(s)I(s)$ o $I(s) = Y(s)V(s)$ para describir las relaciones voltaje-corriente de un resistor, un capacitor o un inductor. Esto es por lo que el concepto de impedancia(o admitancia) es muy ventajoso, las

relaciones en el dominio de la frecuencia son algebraicas y ya no se presentan más derivadas o integrales.

A continuación se generalizan los conceptos de impedancia y admitancia.

Considere los circuitos eléctricos que se exhiben en la figura 1.12.

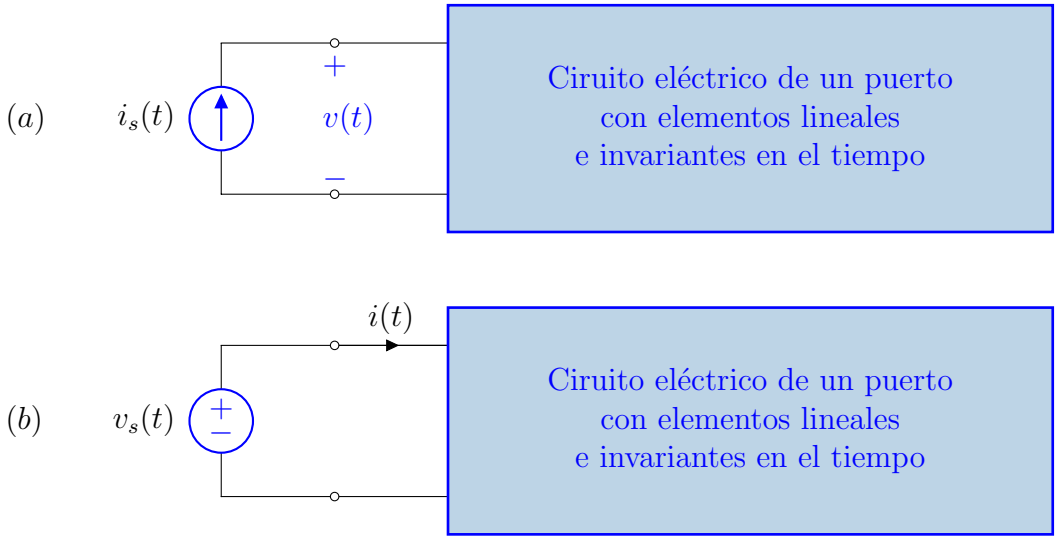

Figura 1.12: Concepto de Impedancia, $Z(s)$ y Admitancia, $Y(s)$.

En el circuito eléctrico de la figura 1.12a, la razón de las transformadas del voltaje y la corriente eléctrica de la entrada es

$$\text{Impedancia} \quad Z(s) \triangleq \frac{V(s)}{I_s(s)} \tag{1.47}$$

mientras que para el circuito eléctrico de la figura 1.12b, la razón de las transformadas de la corriente elé trica y voltaje de entrada es

$$\text{Amitancia} \quad Y(s) \triangleq \frac{I(s)}{V(s)} \tag{1.48}$$

Finalmente, se debe mencionar que las unidades de la impedancia son ohms [Ω] y las unidades de la admitancia son siemens, [S].

Ejemplo 1.2 Encuentre la *función de transferencia* del circuito eléctrico que se observa en la figura 1.13.

El circuito eléctrico de la figura 1.13, se puede dibujar como se ilustra en la figura 1.14, sustituyendo los elementos eléctricos involucrados por sus impedancias correspondientes.

El voltaje en el capacitor está dado por

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) \tag{1.49}$$

donde la corriente en el capacitor se puede obtener del divisor de corriente y está dada por

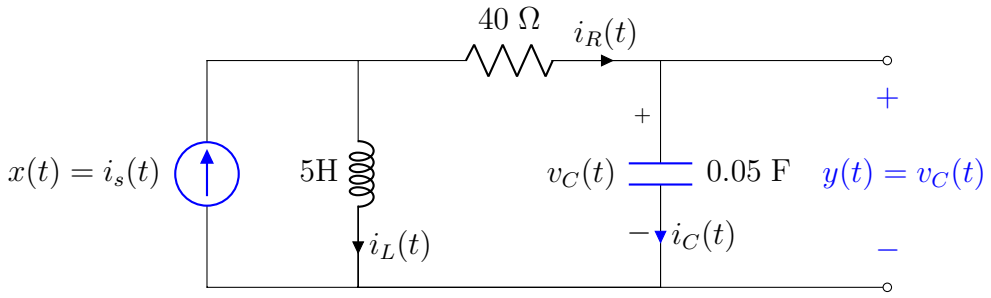

Figura 1.13: Circuito eléctrico de segundo orden.

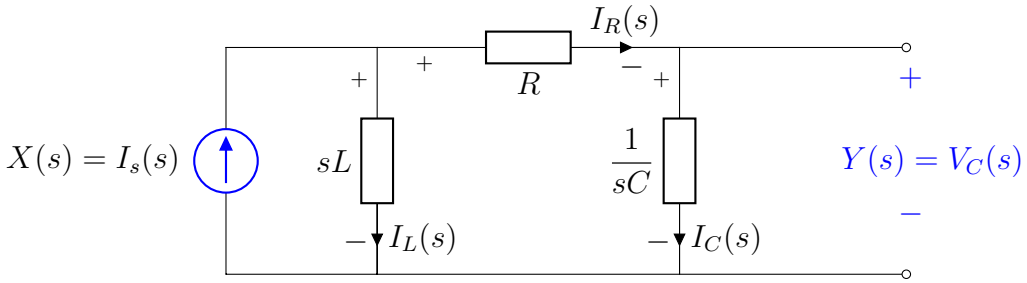

Figura 1.14: Circuito eléctrico de segundo orden

$$I_C(s) = \frac{sL}{sL + \left[R + \frac{1}{sC}\right]} I_s(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} I_s(s) \tag{1.50}$$

Sustituyendo la ecuación (1.50) en la ecuación (1.49) y con un poco de álgebra, se obtiene

$$\frac{V_C(s)}{I_s(s)} = h(s) = \frac{1}{sC} \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} I_s(s) = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} \tag{1.51}$$

Sustituyendo los valores, la función de transferencia es

$$h(s) = \frac{V_C(s)}{I_s(s)} = \frac{20s}{s^2 + 8s + 4} \tag{1.52}$$

¿Es posible obtener la ecuación diferencial que modela este circuito de una manera inmediata?