# Sistemas eléctricos

Víctor Manuel Sánchez Esquivel

22 de febrero de 2022

# Índice general


1.1. Circuitos de parámetros concentrados . . . . . 4
1.1.1. Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) . . . . . 5
1.1.2. Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) . . . . . 5
1.1.3. Fuente independiente de voltaje . . . . . 5
1.1.4. Fuente independiente de corriente . . . . . 5
1.1.5. Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton . . . . . 6
1.1.6. Potencia y energía . . . . . 8
1.2. Breve descripción de sistema . . . . . 9
1.3. Representación de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo mediante ecuaciones diferenciales . . . . . 12
1.4. Ecuaciones diferenciales y función de transferencia . . . . . 16
1.5. Conceptos de impedancia y admitancia en el dominio de la variable compleja s . . . 17

## 1.1. Circuitos de parámetros concentrados

Se denomina *red eléctrica de parámetros concentrados* a la interconexión de elementos eléctricos cuyas dimensiones físicas son despreciables comparadas con la longitud de onda de la frecuencia normal de operación.

En un elemento eléctrico de parámetros concentrados, la corriente eléctrica que circula a través de él y el voltaje en sus terminales se encuentran bien definidos.

En una red eléctrica de parámetros concentrados los elementos de dos terminales se denominan *ramas* y las terminales de los elementos *nodos*.

### Direcciones de referencia

Considere el elemento de parámetros concentrados de dos terminales que se muestra en la figura 1.1.

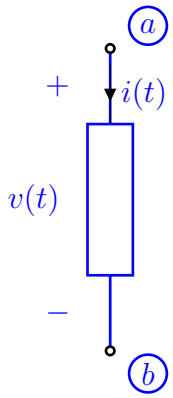



Figura 1.1: Elemento de parámetros concentrados de dos terminales con direcciones de referencia asociadas.

Por convención el *voltaje de la rama* $v(t)$ es positivo en el tiempo $t$ [esto es, $v(t) > 0$], siempre que el potencial del nodo ⓐ en el tiempo $t$ sea mayor que el potencial del nodo ⓑ en el tiempo $t$, medidos ambos potenciales con respecto a una referencia común. Si estos potenciales se representan por $v_a(t)$ y $v_b(t)$, respectivamente, entonces

$$v(t) = v_a(t) - v_b(t) \tag{1.1}$$

Por convención la *corriente eléctrica de rama* $i(t)$ es positiva en el tiempo $t$ [esto es, $i(t) > 0$] siempre que un flujo neto de cargas positivas entre en la rama por el nodo ⓐ y salga por el nodo ⓑ.

Aunque estas direcciones de referencia son arbitrarias; es conveniente trabajar con las llamadas *direcciones de referencia asociadas*. Se dice que la dirección de referencia del voltaje de rama y la dirección de referencia de la corriente eléctrica están asociadas si una corriente eléctrica positiva entra a la rama por la terminal con el signo positivo y la abandona por la terminal con el signo negativo.

### 1.1.1. Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK)

En un circuito de parámetros concentrados, en cualquiera de sus nodos, en todo tiempo, la suma algebraica de las corrientes eléctricas es cero.

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

### 1.1.2. Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK)

En un circuito eléctrico de parámetros concentrados, en cualquiera de sus trayectorias cerradas, en todo tiempo, la suma algebraica de los voltajes de rama es cero.

$$\sum_{k=1}^{m} v_k = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

### 1.1.3. Fuente independiente de voltaje

Un elemento de dos terminales se denomina *fuente independiente de voltaje* si mantiene un voltaje $v_s(t)$ en las terminales del circuito eléctrico arbitrario al cual está conectado; esto es, para cualquier corriente eléctrica $i(t)$ que fluya a través de la fuente, el voltaje en sus terminales es $v_s(t)$. A partir de su definición, una fuente independiente de voltaje tiene una característica en el tiempo $t$ que consiste de una línea recta paralela al eje $i$ en la ordenada $v_s(t)$ en el plano $vi$, como se muestra en la figura 1.2.

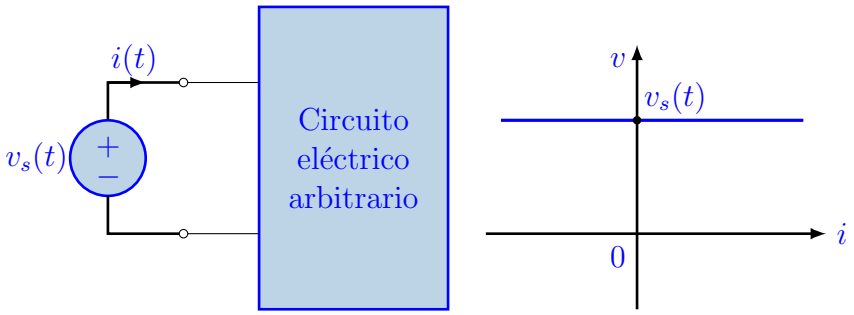



Figura 1.2: $(a)$ Fuente independiente de voltaje conectada a un circuito arbitrario. $(b)$ Característica en el tiempo $t$ de la fuente independiente de voltaje.

Es importante subrayar que en el mundo físico no existe la fuente independiente de voltaje como tal y que una descripción más precisa al referirse a ella sería: fuente independiente de voltaje ideal.

### 1.1.4. Fuente independiente de corriente

Un elemento de dos terminales se denomina *fuente independiente de corriente* si mantiene una corriente eléctrica $i_s(t)$ que fluya hacia las terminales del circuito eléctrico arbitrario al cual está conectado; esto es, para cualquier voltaje $v(t)$, en las terminales del circuito eléctrico, la corriente

eléctrica que fluye hacia él es $i_s(t)$. En el tiempo $t$ la característica de la fuente independiente de corriente es un línea vertical de abscisa $i_s(t)$, como se aprecia en a la figura 1.3.

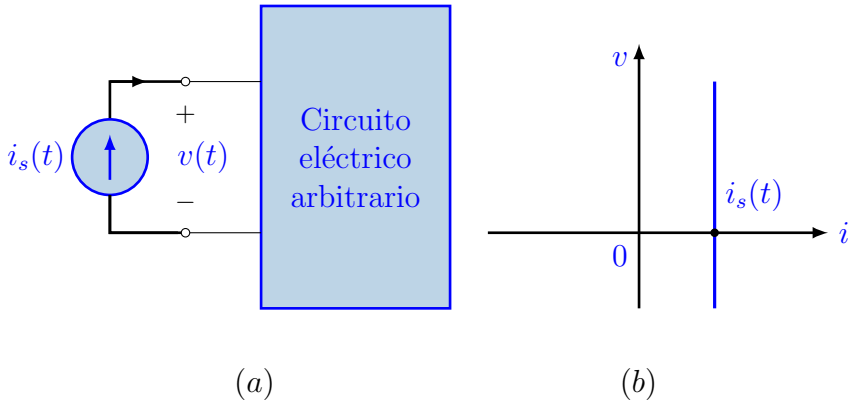



Figura 1.3: $(a)$ Fuente independiente de corriente conectada a un circuito arbitrario. $(b)$ Característica en el tiempo $t$ de la fuente independiente de corriente.

Aquí también se debe señalar que en el mundo físico no existe la fuente independiente de corriente como tal y que una descripción más precisa al referirse a ella sería: fuente independiente de corriente ideal.

### 1.1.5. Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton

En el estudio, análisis y síntesis de las redes eléctricas, frecuentemente es más conveniente utilizar fuentes independientes de voltaje que fuentes independientes de corriente o viceversa, es decir, emplear fuentes independientes de corriente en vez de las de voltaje. Los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton nos proporcionan esta flexibilidad.

Estas equivalencias, sustentan que cualquier red eléctrica *lineal* de dos terminales constituida por fuentes independientes y resistores, sin importar que tan compleja sea, puede representarse ya sea por una fuente independiente de voltaje en serie con un resistor o una fuente independiente de corriente en paralelo con un resistor. La primera representación se denomina circuito equivalente de Thévenin y la segunda, circuito equivalente de Norton. Los circuitos equivalentes se muestran en la figura 1.4.

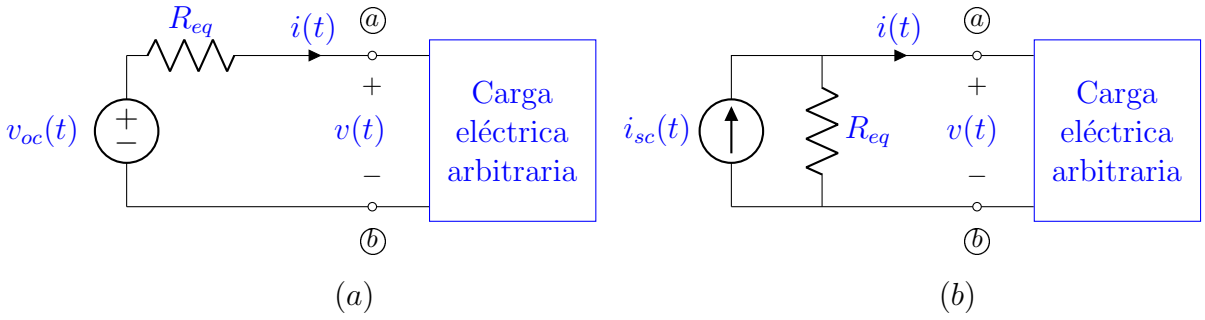



Figura 1.4: $(a)$ Circuito equivalente de Thévenin. $(b)$ Circuito equivalente de Norton.

Para la consecución de estas representaciones, considere la red eléctrica lineal compuesta únicamente por fuentes independientes y resistores conectada a una carga eléctrica arbitraria como se observa en la figura 1.5.

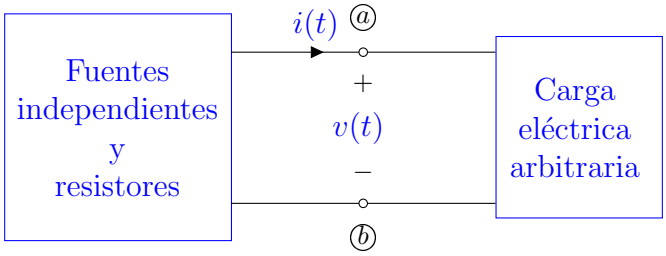



Figura 1.5: Red eléctrica lineal conectada a una carga arbitraria.

En ambos circuitos equivalentes, el resistor $R_{eq}$ es el mismo. Su valor se obtiene de la red eléctrica original *cancelando todas las fuentes independientes*; esto es: se sustituyen *las fuentes independientes de voltaje por corto circuitos* y *las fuentes independientes de corriente por circuitos abiertos*. A continuación se determina o se mide la resistencia *vista* desde los nodos ⓐ y ⓑ como se ilustra en la figura 1.6*a*.

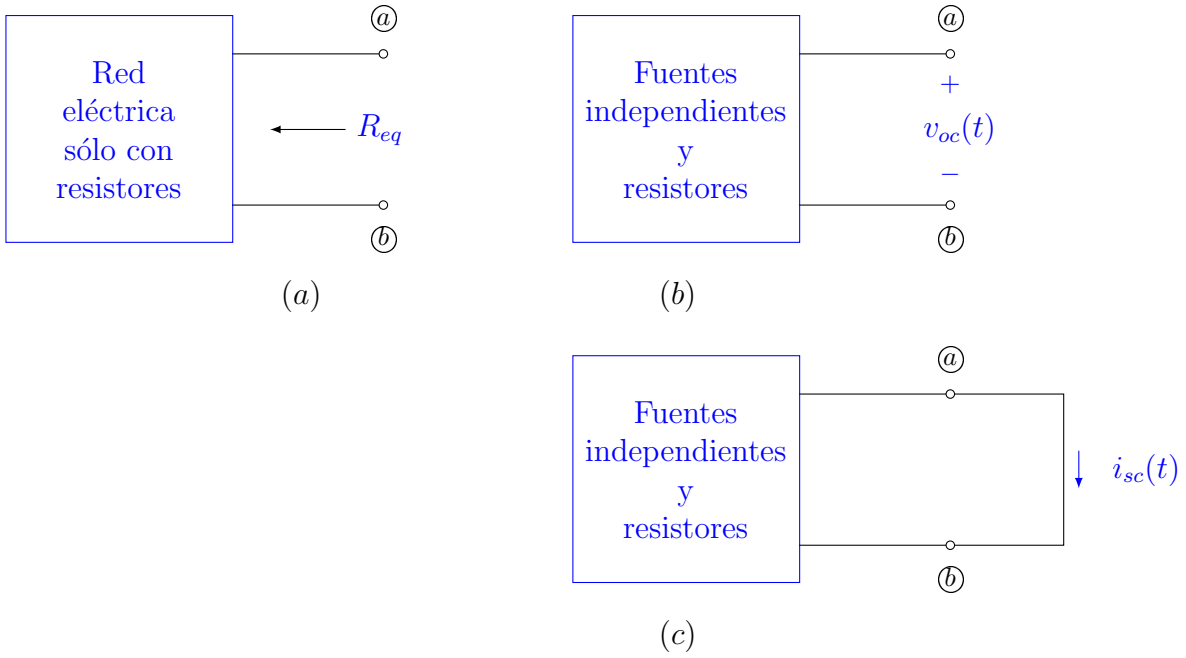



Figura 1.6: $(a)$ Cálculo de la resistencia $R_{eq}$. $(b)$ Obtención del voltaje de circuito abierto, $v_{oc}(t)$. $(c)$ Obtención de la corriente de corto circuito, $i_{sc}(t)$.

El valor de la fuente independiente de voltaje del circuito equivalente de Thévenin, es el del voltaje entre los nodos ⓐ y ⓑ cuando se desconecta la carga eléctrica arbitraria, es decir el voltaje de circuito abierto, o sea $v_{ab}(t) = v_{oc}()$. Esto se muestra en la figura 1.6*b*.

El valor de la fuente independiente de corriente del circuito equivalente de Norton, es el de la corriente eléctrica que fluye del nodo ⓐ hacia el nodo ⓑ cuando se pone en corto circuito la carga

eléctrica arbitraria, $i_{sc}(t)$. La figura 1.6*c* ilustra esta idea.

Es importante advertir que para los procedimientos presentados, se cumple que

$$v_{oc}(t) = R_{eq} i_{sc}(t) \tag{1.4}$$

o también

$$i_{sc}(t) = G_{eq} v_{oc}(t) \tag{1.5}$$

donde

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} \tag{1.6}$$

### 1.1.6. Potencia y energía

Considere la red eléctrica lineal e invariante en el tiempo que se observa en la figura 1.7. La *potencia instantánea* que suministra el generador a la red eléctrica de un puerto,[1] en el tiempo $t$, es igual al producto del voltaje de puerto $v(t)$ y la corriente eléctrica de puerto $i(t)$, con las direcciones de referencia asociadas como se aprecia en la figura 1.7.

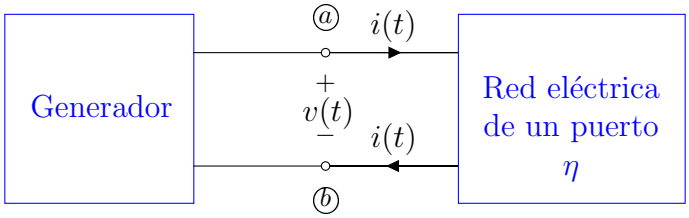



Figura 1.7: La potencia instantánea que se entrega a la red de un puerto en el tiempo $t$ es $p(t) = v(t)i(t)$.

Así

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{1.7}$$

Cuando $i(t)$ está en amperes y $v(t)$ está en volts, $p(t)$ se mide en watts.

La energía es la integral de la potencia, por lo que la energía suministrada por el generador a la red eléctrica de un puerto desde el tiempo $t_0$ al tiempo $t$ es

$$W(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} v(\tau) i(\tau) d\tau \tag{1.8}$$

Considerando direcciones de referencia asociadas, es decir, que la corriente fluye de un punto de mayor potencial a otro de menor potencial, *un elemento de dos terminales es pasivo si y sólo si* $p(t) \geqslant 0$ para todo tiempo. Lo anterior significa que un elemento pasivo nunca proporciona energía al mundo exterior. Cuando un elemento no es pasivo, se dice que es activo.

Finalmente, ya que en este curso se estudian principalmente circuitos eléctricos de parámetros concentrados, lineales, invariantes en el tiempo y dinámicos; es conveniente recordar estos conceptos.

[1] Una red eléctrica de un puerto es cualquier red eléctrica que no contiene fuentes independientes y de la cual sólo un par de terminales se emplean para aplicar una entrada y medir una respuesta.

## 1.2. Breve descripción de sistema

Un sistema se puede considerar un transductor que opera sobre la señal de la entrada para producir la señal de la salida, como se muestra en la figura 1.8.

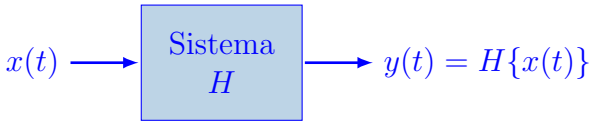



Figura 1.8: Sistema de una sola entrada y un sola salida.

Un sistema (circuito eléctrico) dinámico es aquel en el cual la respuesta en algún tiempo depende del valor presente de la entrada y de algunos valores anteriores de la entrada. Un sistema que contiene un elemento que almacena energía y un elemento que disipa energía es un sistema dinámico.

Un *sistema lineal* satisface el principio de superposición. Un sistema descrito por

$$y(t) = H\{x(t)\} \tag{1.9}$$

es lineal si y sólo si

$$H\{\alpha x_a(t) + \beta x_b(t)\} = \alpha H\{x_a(t)\} + \beta\{x_b(t)\} \tag{1.10}$$

Donde $\alpha$ y $\beta$ son dos números reales diferentes de cero.

Si $x_b(t) = 0$

$$H\{\alpha x_a(t)\} = \alpha H\{x_a(t)\} \qquad \textit{Homogeneidad} \tag{1.11}$$

Si $\alpha = \beta = 1$

$$H\{x_a(t) + x_b(t)\} = H\{x_a(t)\} + H\{x_b(t)\} \qquad \textit{Aditividad} \tag{1.12}$$

Un *sistema invariante en el tiempo* es aquel en el cual la forma de onda de la respuesta depende de la forma de onda de la entrada y no del instante en que se aplica la entrada. Un sistema descrito por la ecuación (1.9) es invariante si sólo si

$$y(t \pm \tau) = H\{x(t \pm \tau)\} \tag{1.13}$$

**Ejemplo 1.1** Determine las corrientes eléctricas en los resistores del circuito eléctrico de la figura 1.9.

Considerando direcciones de referencia asociadas y aplicando las leyes de Kirchhoff en el circuito de la figura 1.10, es posible encontrar las siguientes ecuaciones.

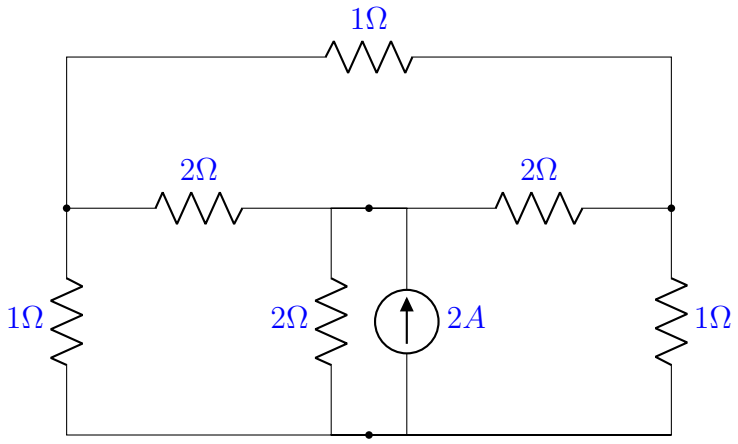



Figura 1.9: Circuito eléctrico constituido por una fuente independiente de corriente y resistores.

En el nodo ① En la malla I

$$j_1 = j_3 + j_6 \qquad (1.14a) \qquad 2j_5 = 2j_1 + 1j_3 \qquad (1.14b)$$

En el nodo ② En la malla II

$$j_s = j_1 + j_2 + j_5 \qquad (1.14c) \qquad 2j_5 = 2j_2 + 1j_4 \qquad (1.14d)$$

En el nodo ③ En la malla III

$$j_4 = j_2 + j_6 \qquad (1.14e) \qquad 2j_2 = 2j_1 + 1j_6 \qquad (1.14f)$$

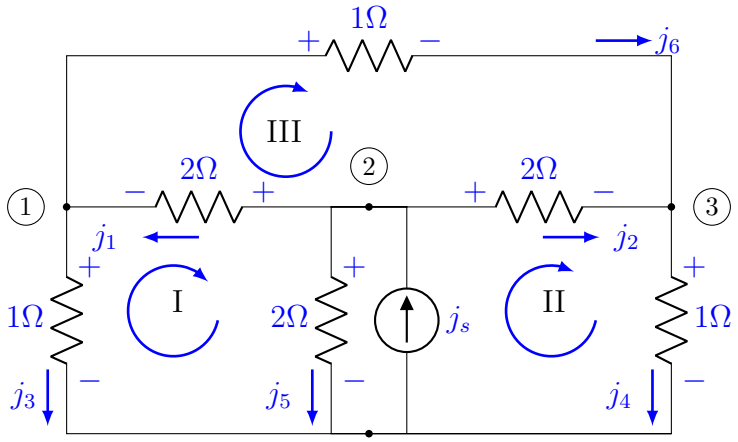



Figura 1.10: Circuito eléctrico resistivo *simétrico*.

A partir de (1.14f) en (1.14d),

$$2j_5 = 2j_1 + j_4 + j_6 \qquad (1.15)$$

Comparando (1.14b) con (1.15),

$$j_3 = j_4 + j_6 \tag{1.16}$$

(1.14e) en (1.16)

$$j_3 = j_2 + j_6 + j_6 = j_2 + 2j_6 \tag{1.17}$$

de (1.17) en (1.14a)

$$j_1 = j_2 + 2j_6 + j_6 = j_2 + 3j_6 \quad \Longrightarrow \; j_1 = j_2 + 3j_6 \tag{1.18}$$

de (1.18) en (1.14f)

$$2j_2 = 2(j_2 + 3j_6) + j_6 = 2j_2 + 7j_6 \quad \Longrightarrow \; j_6 = 0 \tag{1.19}$$

así, de (1.18)

$$j_1 = j_2 \tag{1.20}$$

de (1.14a) y (1.14e)

$$j_1 = j_2 = j_3 = j_4 \tag{1.21}$$

de (1.14b) o de (1.14d)

$$2j_5 = 3j_1 \tag{1.22}$$

de (1.21) y (1.22) en (1.14c)

$$j_s = j_1 + j_1 + \frac{3}{2}j_1 = \frac{7}{2}j_1$$

entonces

$$j_1 = j_2 = j_3 = j_4 = \frac{2}{7}j_s = \frac{4}{7}[A]$$

de (1.22)

$$j_5 = \frac{3}{2}j_1 = \frac{6}{7}[A]$$

## 1.3. Representación de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo mediante ecuaciones diferenciales

Para llevar a cabo el estudio y análisis de un sistema en general (circuito eléctrico en particular) es necesario tener una representación del mismo; esto se logra mediante un modelo. Establecer el modelo de un sistema físico constituye la etapa más crítica en el análisis y diseño de los sistemas ya que debe relacionar de manera cuantitativa las diversas variables del mismo. Un modelo se puede definir como "*una representación de los aspectos esenciales de un sistema, que implican un conocimiento de su comportamiento y que se puede emplear de forma útil*". Para que un modelo tenga alguna utilidad, no debe ser inextricable de forma tal que no se pueda entender y por consiguiente inadecuado para su estudio y análisis; o ser tan simple y trivial hasta el punto en que las predicciones sobre su funcionamiento sean burdas e incongruentes.

Existen dos tipos de circuitos eléctricos, *circuitos de parámetros concentrados* y *circuitos de parámetros distribuidos*. Baste decir aquí, que en un elemento eléctrico concentrado de dos terminales, el voltaje y la corriente eléctrica asociados a él, son cantidades bien definidas en todo instante de tiempo.

Cuando se analizan circuitos eléctricos resistivos, un modelo se puede obtener a partir de un conjunto de ecuaciones de nodo o de ecuaciones de malla, las cuales son ecuaciones algebraicas. Sin embargo, para circuitos eléctricos con elementos que almacenan energía, tales como inductores y capacitores, las ecuaciones que los modelizan ya no son más algebraicas.

Los circuitos eléctricos que serán analizados y en general todos los sistemas están compuestos por elementos interconectados. Para cada elemento existen leyes físicas que pueden representarse por relaciones matemáticas entre las variables asociadas a tal elemento. Dichas leyes se denominan *leyes de elemento*. Además de éstas existen otras, llamadas *leyes de conjunto* que relacionan las variables de los diversos elementos que constituyen el circuito eléctrico.

Los circuitos eléctricos que se estudian en esta asignatura se pueden modelizar por medio de una ecuación diferencial lineal ordinaria de la forma

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\,(t)\,\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^{M} b_n(t)\frac{d^n x(t)}{dt^n} \tag{1.23}$$

Esta ecuación diferencial describe un sistema lineal de orden $N$, donde $N$ representa la máxima derivada de la *única* salida del circuito y $M$, es la máxima derivada de la *única* entrada del circuito eléctrico.

Por otro lado, si los coeficientes de la ecuación (1.23) no dependen del tiempo, es decir son constantes, entonces la ecuación

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^{M} b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \tag{1.24}$$

describe un circuito eléctrico lineal e *invariante en el tiempo*, *fijo* o *estacionario*.

La solución de la ecuación diferencial (1.23) o (1.24) consta de dos partes, la primera cuando la entrada es nula, es llamada *función complementaria* (de los matemáticos clásicos), *respuesta natural* o *respuesta libre*. Hoy en día, se acostumbra denominarla *respuesta de entrada cero*, y se debe a la energía almacenada en el sistema. La otra parte de la solución es la solución de la ecuación no homogénea y es la *integral particular* (de los matemáticos clásicos), *solución particular* o *respuesta forzada*. Se le conoce como *respuesta de estado cero* (o *respuesta de estado de energía inicial nula*), lo que indica que la energía inicial es cero y se debe por entero a la entrada. Matemáticamente, lo anterior se expresa de la siguiente manera

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \tag{1.25}$$

La respuesta de estado cero de un sistema *lineal* y *causal* descrito por la ecuación (1.23), está dada por la siguiente expresión

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.26}$$

Y la respuesta completa de un sistema lineal e invariante en el tiempo caracterizado por la ecuación (1.24) [2] es de la forma

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n e^{s_n t} + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.27}$$

donde las $s_n$ son las raíces de la ecuación característica y se conocen como *eigenvalores* o simplemente *valores característicos*, esto es

$$\sum_{n=0}^{N} a_n s^n = 0 \tag{1.28}$$

La integral de la ecuación (1.27), correspondiente a la respuesta de estado cero, recibe diversos nombres, entre otros *integral de convolución*, *integral de Helmholtz* o *integral de superposición*. El término convolución aparece más frecuentemente, pero el término de *superposición* es más descriptivo, no sólo por la naturaleza de la integral en sí misma, sino porque nos recuerda que sólo se aplica para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Las definiciones de respuesta transitoria y respuesta de estado permanente, se pueden proporcionar de manera concisa. La respuesta transitoria es la parte de la respuesta completa que se hace cero cuanto $t$ tiende a infinito. La respuesta de estado permanente es la parte de la respuesta completa que no se hace cero cuanto $t$ tiende a infinito.

**Ejemplo 1.2** Encuentre el voltaje del capacitor $v_C(t)$, para $-\infty < t < \infty$, del circuito eléctrico que se observa en la figura 1.11.

Como el circuito eléctrico es lineal, se puede aplicar el principio de superposición. Los valores de voltajes y corrientes eléctricas, se obtienen teniendo presente que antes de que la fuente independiente de corriente de la izquierda se active en $t = 0$, el circuito eléctrico se encuentra ya en

[2] Si los valores característicos son diferentes.

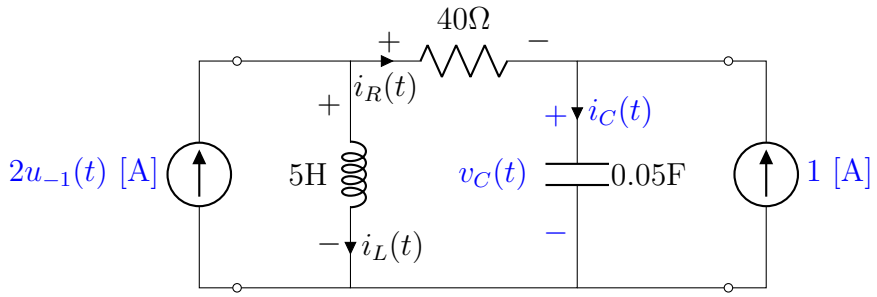



Figura 1.11: Circuito eléctrico RLC de segundo orden.

estado permanente. La corriente eléctrica de la fuente independiente de corriente de la derecha fluye completamente (de derecha a izquierda) a través del resistor y del inductor. Entonces

$$\begin{aligned} v_R(t) &= -40\,[\text{V}] & i_R(t) &= -1[\text{A}] \\ v_L(t) &= 0[\text{V}] & i_L(t) &= 1[\text{A}] \\ v_C(t) &= 40[\text{V}] & i_C(t) &= 0[\text{A}] \end{aligned}$$

Para determinar el efecto de la otra fuente independiente de corriente, se obtiene la ecuación diferencial que describe o modeliza el circuito eléctrico $\big($*Se pone en circuito abierto la fuente independiente de corriente de 1 [A]*$\big)$. Las ecuaciones de conjunto, se obtienen a partir de las leyes de Kirchhoff.

De la LCK se tiene

$$\begin{aligned} i_s(t) &= i_L(t) + i_R(t) \\ &= i_L(t) + i_C(t) \end{aligned} \tag{1.29}$$

y de la LVK

$$\begin{aligned} v_L(t) &= v_R(t) + v_C(t) \\ &= Ri_R(t) + v_C(t) \\ &= Ri_C(t) + v_C(t) \\ &= RC\frac{dv_C(t}{dt} + v_C(t) \\ L\frac{di_L(t)}{dt} &= RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \end{aligned} \tag{1.30}$$

considerando la ecuación (1.29) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} L\frac{d}{dt}\big[i_s(t) - i_C(t)\big] &= L\frac{di_s(t)}{dt} - LC\frac{d^2v_C(t}{dt^2} \\ &= RC\frac{dv_C(t}{dt} + v_C(t) \end{aligned} \tag{1.31}$$

agrupando términos

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v_C(t) = \frac{1}{C}\frac{di_s(t)}{dt} \tag{1.32}$$

sustituyendo los valores de los elementos

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + 8\frac{dv_C(t)}{dt} + 4v_C(t) = 20\frac{di_s(t)}{dt} \tag{1.33}$$

la ecuación característica es

$$s^2 + 8s + 4 = 0 \tag{1.34}$$

y los valores característicos son

$$\begin{aligned} s_1 &= -4 + 2\sqrt{3} \\ s_1 &= -4 - 2\sqrt{3} \end{aligned} \tag{1.35}$$

Por tanto, la respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{5}{\sqrt{3}}\left[\left(4 + 2\sqrt{3}\right)e^{-\left(4+2\sqrt{3}\right)t} - \left(4 - 2\sqrt{3}\right)e^{-\left(4-2\sqrt{3}\right)t}\right]u_{-1}(t) \tag{1.36}$$

Y el voltaje del capacitor de estado inicial cero, debido a la fuente independiente de corriente con $i_s(t) = 2u_{-1}(t)$, es

$$\begin{aligned} v_{C_{zs}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\xi)x(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)x(t-\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{5}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(4 + 2\sqrt{3}\right)e^{-\left(4+2\sqrt{3}\right)\xi} - \left(4 - 2\sqrt{3}\right)e^{-\left(4-2\sqrt{3}\right)\xi}\right]u_{-1}(\xi)2u_{-1}(t-\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{10}{\sqrt{3}}\int_{0}^{t}\left[\left(4 + 2\sqrt{3}\right)e^{-\left(4+2\sqrt{3}\right)\xi} - \left(4 - 2\sqrt{3}\right)e^{-\left(4-2\sqrt{3}\right)\xi}\right]\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{10}{\sqrt{3}}\left[e^{-\left(4-2\sqrt{3}\right)t} - e^{-\left(4+2\sqrt{3}\right)t}\right] \end{aligned} \tag{1.37}$$

Así, la respuesta considerando ambas fuentes independientes de corriente, es por consiguiente

$$v_{C_{zs}}(t) = 40 + \frac{10}{\sqrt{3}}\left[e^{-\left(4-2\sqrt{3}\right)t} - e^{-\left(4+2\sqrt{3}\right)t}\right]u_{-1}(t) \tag{1.38}$$

Se debe hacer notar que la función escalón unitario se utiliza únicamente para enfatizar que la función a la que está multiplicando sólo tiene validez para $t \geq 0$.

## 1.4. Ecuaciones diferenciales y función de transferencia

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo con una sola entrada $x(t)$ y una sola salida $y(t)$. Si se puede describir o modelizar por una ecuación diferencial, entonces los coeficientes serán constantes, y para un sistema de orden $N$ la descripción está dada por la ecuación (1.39)

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^{M} b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \tag{1.39}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n s^n Y(s) - \sum_{n=1}^{N} a_n \left\{ \sum_{k=1}^{n} y^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\} = \sum_{n=0}^{M} b_n s^n X(s) - \sum_{n=1}^{M} b_n \left\{ \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\}$$

donde $y^{k-1}(0^-)\big[x^{k-1}(0^-)\big]$ es la $(k-1)$-ésima derivada de $y(t)\big[x(t)\big]$ evaluada en $t = 0^-$.

Despejando a $Y(s)$, resulta

$$Y(s) = \left[ \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n \left\{ \sum_{k=1}^{n} y^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} \right] + \left[ \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{M} b_n s^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} X(s) + \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{M} b_n \left\{ \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} \right] \tag{1.40}$$

o

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

La transformada inversa de Laplace del primer término de la derecha de la ecuación (1.40) es la respuesta de entrada cero, mientras que la transformada inversa de Laplace del segundo término de la derecha es la respuesta de estado cero.

La función de transferencia se define como la razón de la transformada de Laplace de la salida a la transformada de Laplace de la entrada cuando todas las condiciones son nulas. Luego

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{M} b_n s^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} \qquad x^{k-1}(0^-) = y^{k-1}(0^-) = 0 \tag{1.41}$$

## 1.5. Conceptos de impedancia y admitancia en el dominio de la variable compleja s

En el dominio del tiempo las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff son

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{en todo nodo}$$
$$\sum_{k=1}^{m} v_k(t) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{en toda malla}$$

Si $I(s)$ es la transformada de Laplace de $i(t)$ y $V(s)$ es la transformada de Laplace de $v(t)$, las leyes de Kirchhoff bajo la transformada de Laplace también satisfacen

$$\sum_{k=1}^{n} I_k(s) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\sum_{k=1}^{m} V_k(s) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

En el dominio del tiempo, las variables de corriente eléctrica y de voltaje, en un resistor lineal e invariante en el tiempo, están relacionadas por

$$v(t) = R\,i(t) \tag{1.42}$$

Obteniendo su transformada de Laplace, la ecuación anterior resulta

$$V(s) = R\,I(s) \tag{1.43}$$

Se concluye, entonces, que en el dominio de la frecuencia la transformada de Laplace del voltaje en un resistor es igual a la resistencia por la transformada de Laplace de la corriente eléctrica que fluye a través de él. El factor $R$ recibe el nombre de *impedancia* del resistor, sus unidades son *ohms*, $\Omega$. Asimismo, su reciproco (conductancia) $1/R = G$ se denomina *admitancia* del resistor, se mide en *siemens*, S .

En el dominio del tiempo, las variables de corriente eléctrica y de voltaje en el capacitor lineal e invariante en el tiempo, están relacionadas por

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{1.44}$$

o

$$v(t) = v(0^-) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.45}$$

Bajo la transformada de Laplace, la ecuación (1.44) se transforma en

$$I(s) = C\left[sV(s) - v(0^-)\right] \tag{1.46}$$

ecuación que se puede escribir como

$$V(s) = \frac{v(0^-)}{s} + \frac{1}{sC} I(s) \tag{1.47}$$

Las ecuaciones (1.46) y (1.47) son aseveraciones equivalentes. En particular, si el valor inicial del voltaje en el capacitor es cero. La ecuación(1.47) se reduce a

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) \tag{1.48}$$

De esta manera, en el dominio de la frecuencia, el voltaje del capacitor con un *un voltaje inicial cero* se encuentra multiplicando la corriente eléctrica a través de él por $1/sC$. Este factor, $1/sC$, se denomina la *impedancia* del capacitor y su recíproco, $sC$ se conoce como la *admitancia* del capacitor.

En el dominio del tiempo, las variables de corriente eléctrica y de voltaje en un inductor lineal e invariante en el tiempo, se relacionan por

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \tag{1.49}$$

o

$$i(t) = i(0^-) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{1.50}$$

De la transformada de Laplace de la ecuación (1.49), se obtiene

$$V(s) = L \left[ sI(s) - i(0^-) \right] \tag{1.51}$$

o

$$I(s) = \frac{i(0^-)}{s} + \frac{V(s)}{sL} \tag{1.52}$$

En particular, si el valor inicial de la corriente en el inductor es cero, la ecuación (1.51), se convierte en

$$V(s) = sLI(s) \tag{1.53}$$

En el dominio de la frecuencia, por consiguiente, el voltaje en un inductor con *corriente inicial cero* se determina multiplicando la corriente eléctrica en él por el factor $sL$. Este término, $sL$, es nombrado la *impedancia* del inductor y $1/sL$, la *admitancia* del inductor.

En la figura 1.12, se presenta un compendio de las relaciones en los dominios del tiempo y de la frecuencia, hasta ahora vistos.

La impedancia se representa por el símbolo $Z(s)$ y la admitancia por el símbolo $Y(s)$. Debe ser claro que tales relaciones son recíprocas, es decir

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} \qquad Z(s)Y(s) = 1 \tag{1.54}$$

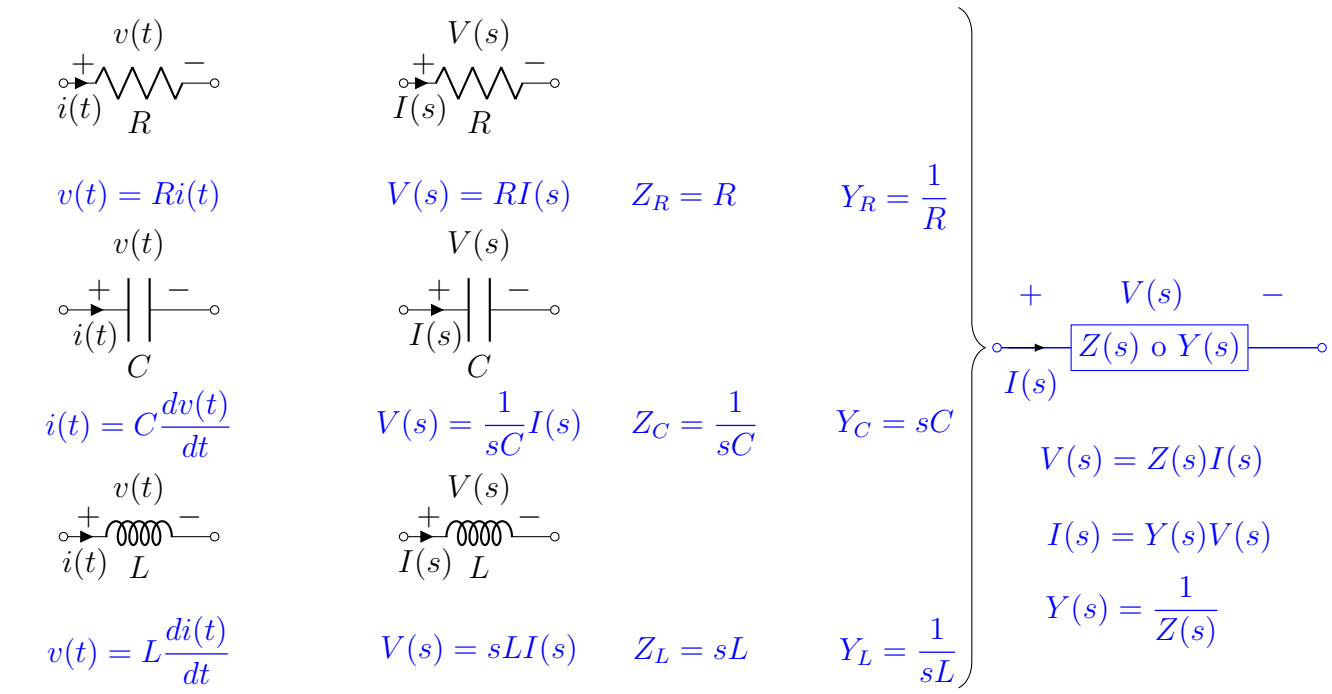
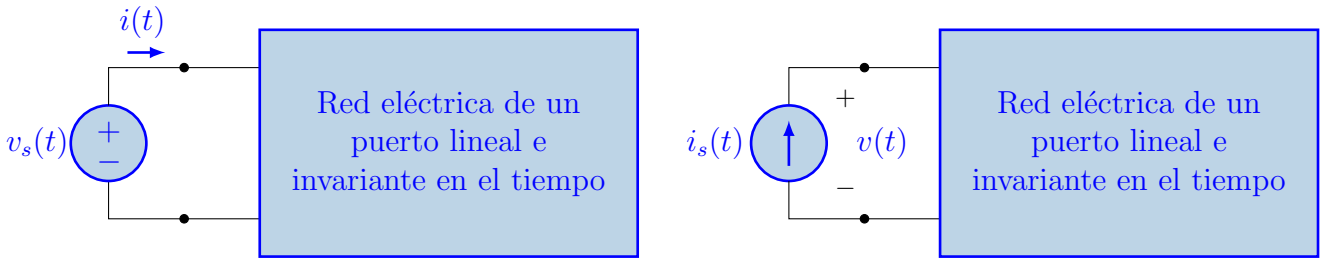



Figura 1.12: Tabla de impedancias y admitancias.

Se concluye que sólo se requiere una ecuación algebraica, esto es, $V(s) = Z(s)I(s)$ o $I(s) = Y(s)V(s)$ para describir las relaciones voltaje-corriente de un resistor, de un capacitor o de un inductor. Por este motivo es que el concepto de impedancia (o admitancia) es muy ventajoso. Las *relaciones en el dominio de la frecuencia son algebraicas y ya no se presentan más derivadas o integrales.*

A continuación se generalizan los conceptos de impedancia y admitancia. Considere la situación que se muestra en la figura 1.13, en donde

$$\text{Impedancia} \quad Z(s) \triangleq \frac{V(s)}{I(s)} \tag{1.55}$$




$(a)$ $(b)$

Figura 1.13: Conceptos de Impedancia y Admitancia.

$$\text{Admitancia} \quad Y(s) \triangleq \frac{I(s)}{V(s)} \tag{1.56}$$

Finalmente, se debe mencionar que las unidades de la impedancia son ohms, $\Omega$, y las unidades de la admitancia son siemens, S.

**Ejemplo 1.3** Encuentre la función de transferencia del circuito eléctrico RLC presente en la figura 1.14.

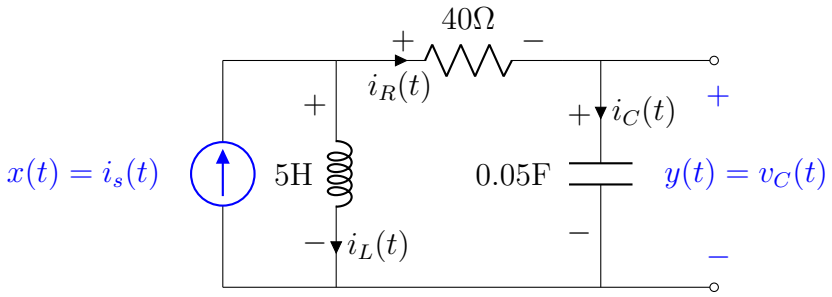



Figura 1.14: Circuito eléctrico RLC de segundo orden.

El circuito eléctrico de la figura 1.14, se puede dibujar como se ilustra en la figura 1.15, sustituyendo los elementos eléctricos involucrados por sus impedancias correspondientes.

El voltaje en el capacitor está dado por

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) \tag{1.57}$$

donde la corriente eléctrica en el capacitor se puede obtener del divisor de corriente y está dada por

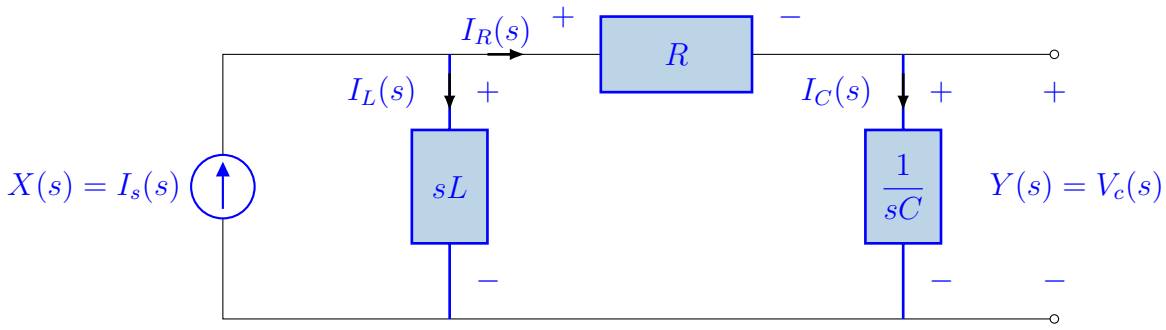



Figura 1.15: Circuito eléctrico RLC de segundo orden.

$$I_C(s) = \frac{sL}{sL + \left[R + \dfrac{1}{sC}\right]} I_s(s) = \frac{s^2}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{CL}} I_s(s) \tag{1.58}$$

Sustituyendo la ecuación (1.58) en la ecuación (1.57) y con un poco de álgebra, se obtiene

$$\frac{V_C(s)}{I_s(s)} = H(s) = \frac{1}{sC}\frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} \tag{1.59}$$

Sustituyendo los valores, la función de transferencia es

$$\frac{V_c(s)}{I_s(s)} = H(s) = \frac{20s}{s^2 + 8s + 4}$$

¿Es posible obtener la ecuación diferencial que modeliza a este circuito eléctrico de una manera inmediata?

La respuesta es sí, para ello considere las ecuaciones (1.39) y (1.41).