

Métodos generales de análisis de redes eléctricas

Víctor Manuel Sánchez Esquivel

Índice general

4.1.	Introducción	4
4.2.	Transformación de fuentes	4
4.2.1.	Rama genérica arbitraria	5
4.2.2.	Gráfica asociada de una red eléctrica y sus propiedades	6
4.3.	Matriz de incidencia, matriz de mallas y las leyes de Kirchhoff	8
4.4.	Análisis por el método de nodos de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo	10
4.5.	Fuentes controladas o dependientes	13
4.6.	Análisis en estado sinusoidal permanente	14
4.6.1.	Propiedades de la matriz de admitancias de nodo	14
4.6.2.	Obtención de la ecuación de nodos por inspección	14
4.7.	Análisis por el método de mallas de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo	16
4.7.1.	Propiedades de la matriz de impedancias de malla	18
4.7.2.	Obtención de la ecuación de mallas por inspección	18
4.8.	Método abreviado	19
4.9.	Escalamiento de impedancia y de frecuencia	21
4.9.1.	Escalamiento de impedancia	21
4.9.2.	Escalamiento de frecuencia	23
4.9.3.	Desnormalización de una función de transferencia	26

4.1. Introducción

En este capítulo se estudian métodos o procedimientos poderosos y sencillos para el estudio y análisis de las redes eléctricas de parámetros concentrados. El objetivo de estos métodos se puede definir en forma lacónica: dada la gráfica asociada de una red eléctrica, las características de las ramas que la conforman, las formas de onda de las entradas y las condiciones iniciales, *encontrar todos los voltajes y las corrientes eléctricas de rama*.

4.2. Transformación de fuentes

En el estudio y análisis de las redes eléctricas, en principio, es conveniente *transformar* las fuentes independientes *ideales*, tanto de voltaje como de corriente, en fuentes independientes *reales*. Para realizar lo anterior, se introducen dos transformaciones que permiten trasladar las fuentes de la red eléctrica sin que se modifiquen las relaciones de voltajes y de corrientes eléctricas de dicha red. Estas transformaciones se pueden aplicar tanto a las fuentes independientes como a las fuentes dependientes (que se introducen y estudian más adelante).

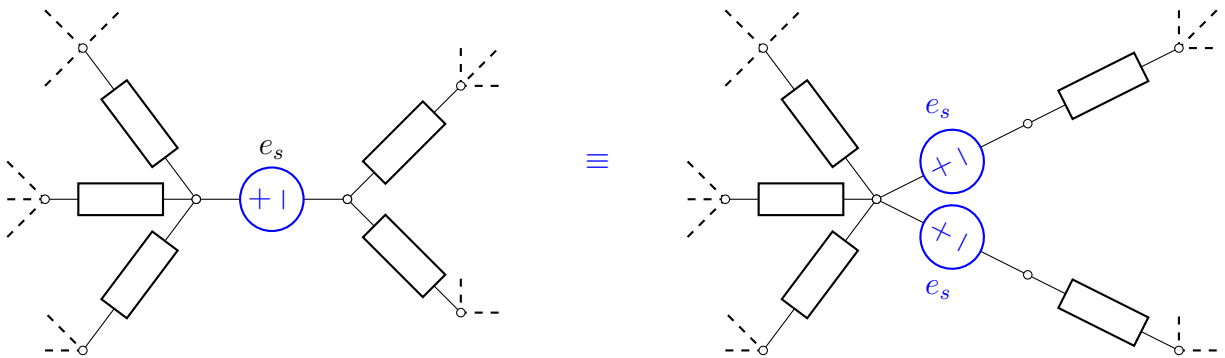


Figura 4.1: Transformación de una *fente de voltaje ideal* en una *fente de voltaje real*.

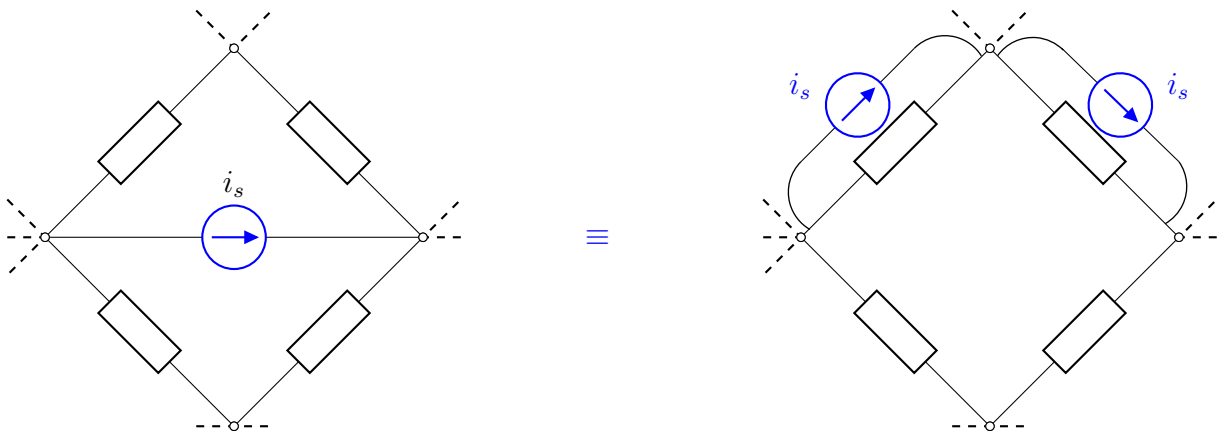


Figura 4.2: Transformación de una *fente ideal* de corriente en una *fente real* de corriente.

En las figuras 4.1 y 4.2 se presentan las transformaciones correspondientes para las que en una red eléctrica dada, cada fuente independiente de voltaje esté conectada en serie con un elemento

que no es otra fuente y cada fuente independiente de corriente esté conectada en paralelo con un elemento que no es otra fuente.

4.2.1. Rama genérica arbitraria

En general, una rama arbitraria de cualquier red eléctrica lineal e invariante en el tiempo, digamos, la rama k , tiene la forma que se muestra en la figura 4.3, donde v_{sk} representa una fuente independiente de voltaje, j_{sk} una fuente independiente de corriente, y el rectángulo una admitancia y_k .

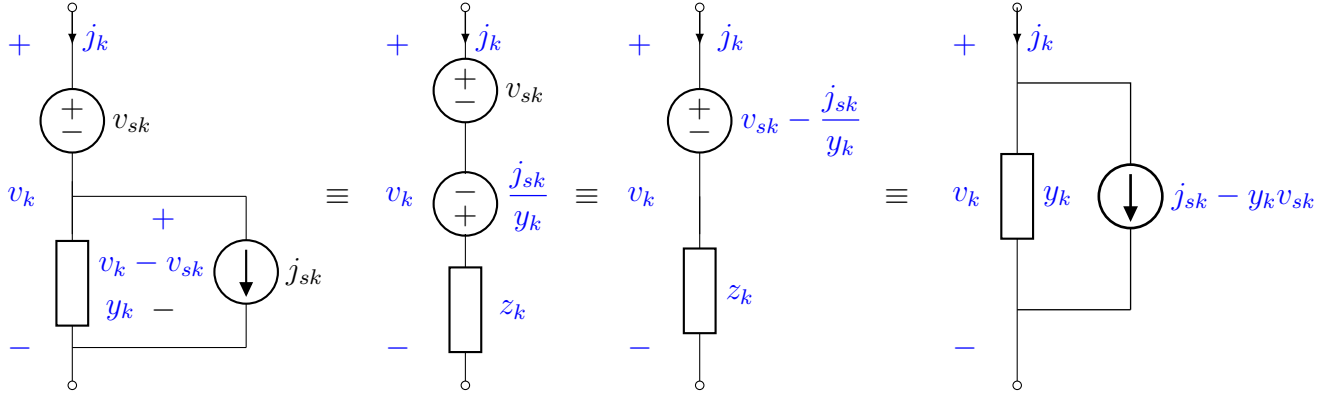


Figura 4.3: Forma general de una rama arbitraria de una red eléctrica.

Si v_k y j_k representan el voltaje y la corriente eléctrica de la rama k , respectivamente; la ecuación de la rama es

$$j_k = y_k v_k + j_{sk} - y_k v_{sk} \quad (4.1)$$

En figura 4.4, se presenta otra forma general de una rama arbitraria de una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo, por supuesto es equivalente a la que aparece en la figura 4.3. La ecuación que relaciona las variables eléctricas que en ella aparecen es

$$v_k = z_k j_k + v_{sk} - z_k j_{sk} \quad (4.2)$$

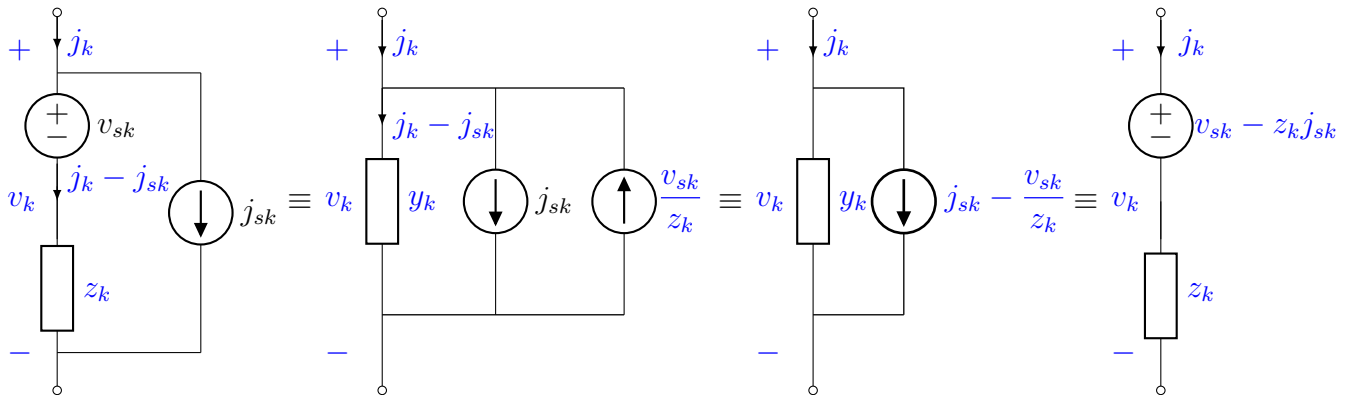


Figura 4.4: Forma general de una rama arbitraria de una red eléctrica.

4.2.2. Gráfica asociada de una red eléctrica y sus propiedades

A continuación, se presentan definiciones y propiedades de las gráficas en general y que son de gran utilidad en el estudio y análisis de las redes eléctricas que se estudian.

Definición de gráfica: una *gráfica* es un conjunto de nodos y ramas, con la condición de que cada rama debe estar conectada a un nodo en cada extremo. En la figura 4.5 se muestran ejemplos de redes eléctricas y sus gráficas asociadas.

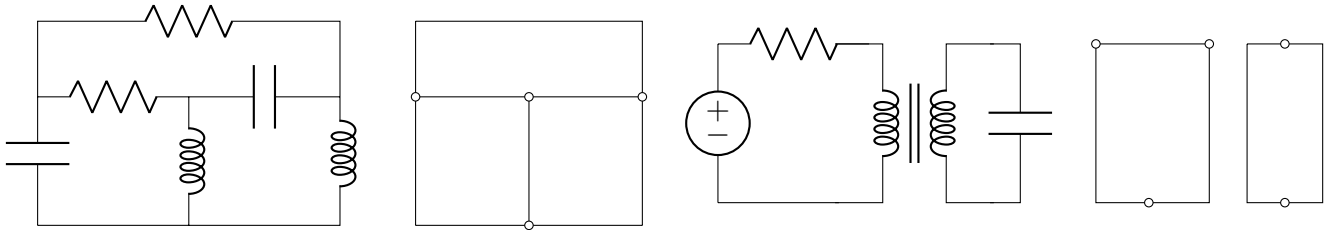


Figura 4.5: Redes eléctricas y sus gráficas asociadas.

Se dice que una gráfica G_1 es una *subgráfica* de la gráfica G , si cada nodo de G_1 es un nodo de G y cada rama de G_1 es una rama de G .

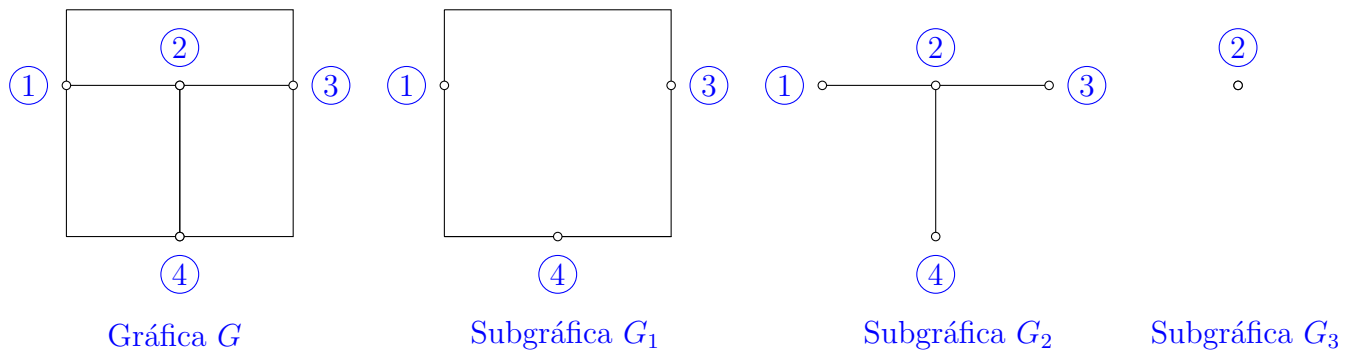


Figura 4.6: Gráfica G y subgráficas de G .

La figura 4.6 muestra una gráfica G y subgráficas de ella. La subgráfica G_3 recibe el nombre de subgráfica *degenerada*.

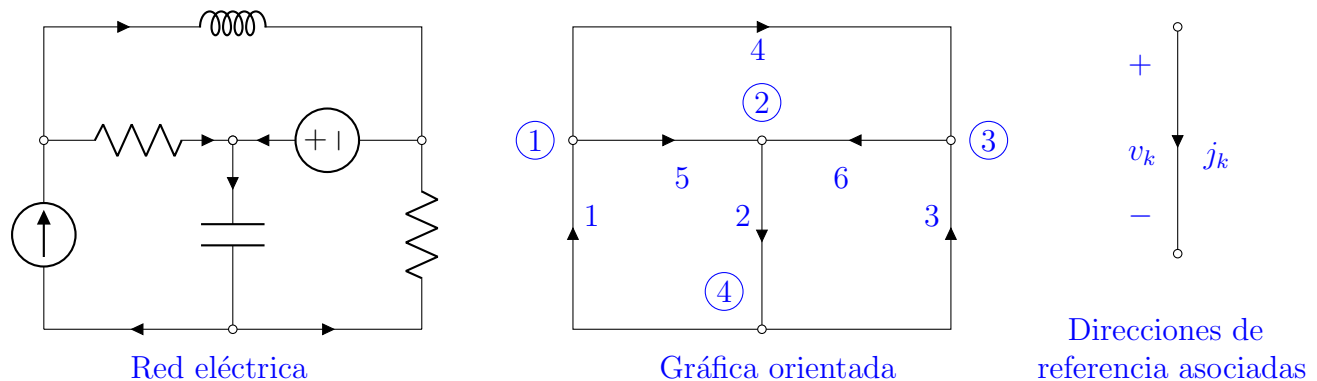


Figura 4.7: Red eléctrica y su gráfica asociada orientada.

En la figura 4.7 se ilustra el concepto de red eléctrica y su *gráfica asociada orientada*; recuerde que se sigue la convención de direcciones de referencia asociadas.

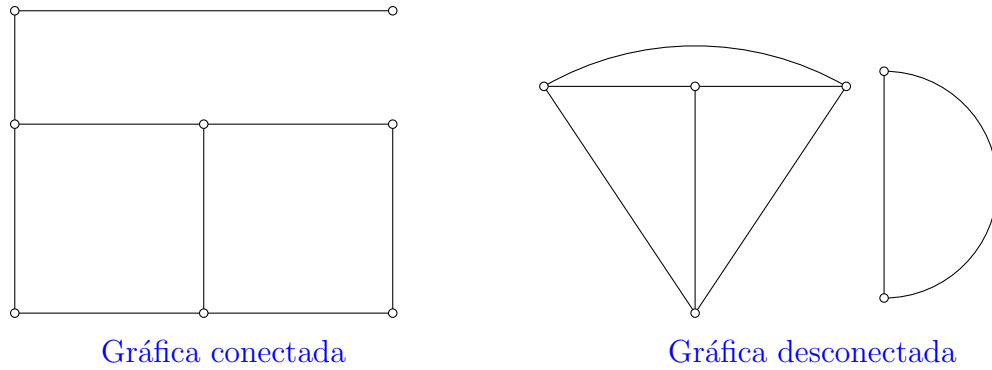


Figura 4.8: Gráfica conectada y gráfica desconectada.

Una gráfica está *conectada*, si existe por lo menos una trayectoria entre cualquier par de nodos, sin considerar la dirección de las ramas. En la figura 4.8, se muestra una gráfica conectada y una gráfica no conectada.

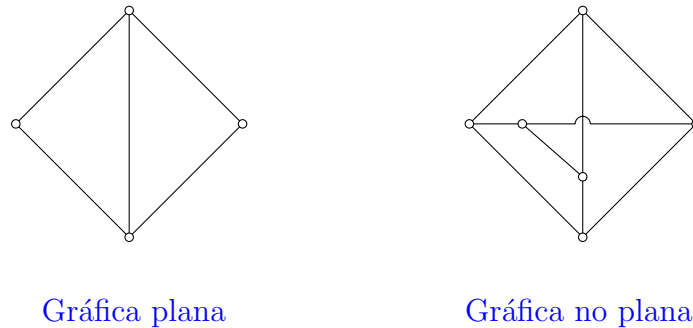


Figura 4.9: Gráfica plana y gráfica no plana.

Una gráfica es *plana* si se puede dibujar en una forma tal que dos ramas no se intersequen en un punto que no sea un nodo. En la figura 4.9 se muestran una gráfica plana y una gráfica no plana.

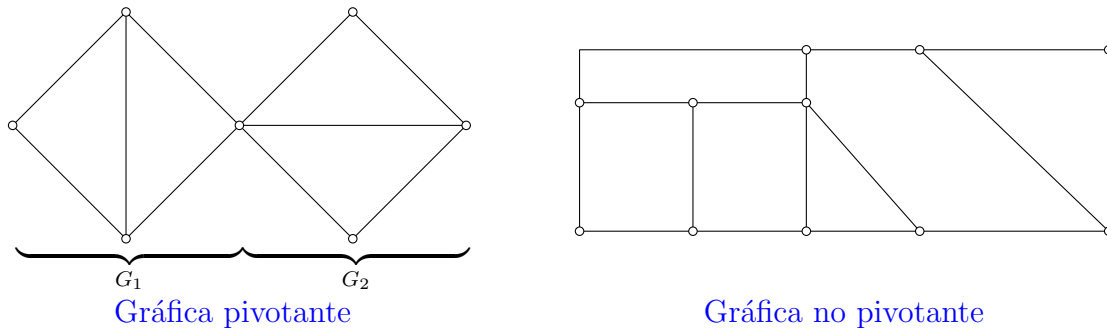


Figura 4.10: Gráfica pivotante y gráfica no pivotante.

Una gráfica *pivotante* es aquella que se puede dividir en dos subgráficas (no degeneradas) unidas por un solo nodo. En la figura 4.10 se muestra una gráfica pivotante y una que no lo es.

4.3. Matriz de incidencia, matriz de mallas y las leyes de Kirchhoff

Sea una gráfica orientada que está integrada por b ramas y n_t nodos. Si los nodos y las ramas de esta gráfica se numeran arbitrariamente, se denomina *matriz de incidencia* $[A]_a$ a la matriz de n_t renglones y b columnas cuyos elementos a_{ik} se definen como

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si la rama } k \text{ sale del nodo } i \\ -1 & \text{si la rama } k \text{ entra al nodo } i \\ 0 & \text{si la rama } k \text{ no conecta con el nodo } i \end{cases}$$

Ejemplo 4.1 Considere la gráfica asociada orientada de una red eléctrica arbitraria

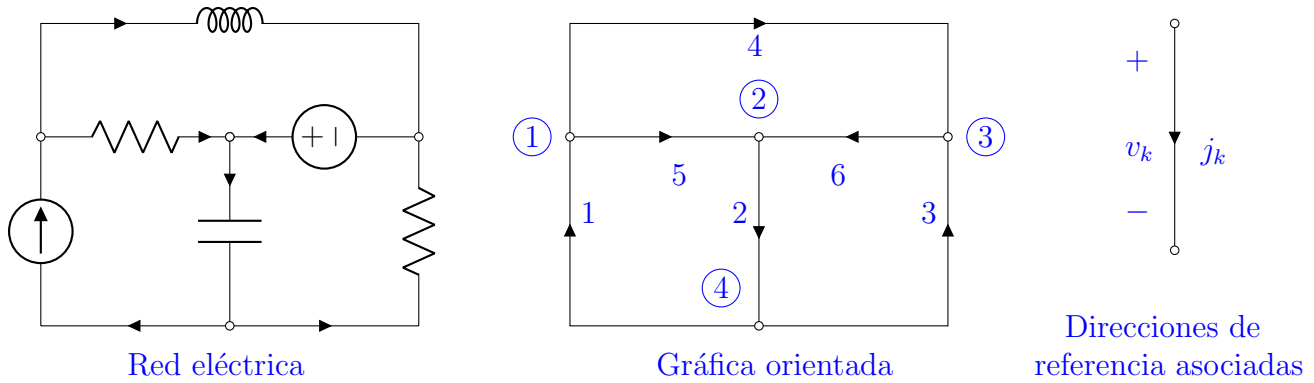


Figura 4.11: Gráfica asociada orientada y su matriz de incidencia ampliada.

La matriz de incidencia de la red eléctrica de la figura 4.11 es

$$[A]_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, se define el *vector de corriente de rama* J al vector columna cuyo k -ésimo elemento es la corriente eléctrica j_k de la rama k . Pudiéndose afirmar que

$$[A]_a J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que no todas las ecuaciones de corriente que se pueden establecer son linealmente independientes, entonces

$$[A]J = 0 \quad \text{Ley de corrientes de Kirchhoff} \quad (4.3)$$

donde $[A]$ es la matriz de incidencia reducida. La ecuación (4.3) constituye un conjunto de $n = n_t - 1$ ecuaciones *linealmente independientes* en las variables $j_1, j_2, \dots, j_b$, es decir que la matriz $[A]$ es una matriz de rango completo.

A continuación, se define el *vector de tensiones de nodo* $E]$ al vector columna cuyo n -ésimo elemento represente el voltaje del nodo n con respecto al nodo de referencia. Se puede aser que

$$[A]^T E] = V] \quad (4.4)$$

donde $V]$ es el *vector de tensiones de rama*, cuyo k -ésimo elemento constituye el voltaje de la k -ésima rama.

En otro orden de ideas, se define una *mall* como un conjunto de ramas que forman una trayectoria cerrada sin contener ninguna rama en el interior de dicha trayectoria. Además, una *mall externa* es un conjunto de ramas que forman una trayectoria cerrada sin quedar ninguna rama en el exterior de tal trayectoria.

Una gráfica no pivotante, plana, conectada y orientada de b ramas y n_t nodos tiene un número de mallas igual a $l = b - n_t + 1$; donde b indica el número de ramas y n_t el número total de nodos.

Considere una gráfica no pivotante, plana, conectada y orientada de b ramas y n_t nodos. Se asigna por convención la siguiente dirección de referencia para las trayectorias cerradas: una dirección en sentido de las manecillas del reloj para las mallas y una dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj para la *mall externa*.

Si las mallas se numeran arbitrariamente, se define a la matriz de mallas $[M]_a$ a la matriz de m renglones (donde m es el número de mallas incluyendo la *mall externa*) y b columnas cuyos elementos m_{ik} se definen como

$$m_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si la rama } k \text{ pertenece a la mall } i \text{ y coinciden en su sentido de referencia.} \\ -1 & \text{si la rama } k \text{ pertenece a la mall } i \text{ y no coinciden en su sentido de referencia.} \\ 0 & \text{si la rama } k \text{ no pertenece a la mall } i \end{cases}$$

Ejemplo 4.2 Sea la gráfica orientada, de un circuito arbitrario, que se exhibe en la figura 4.12.

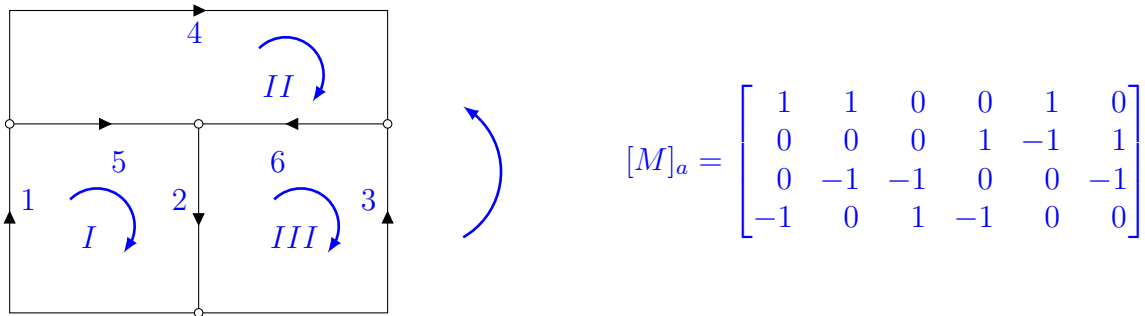


Figura 4.12: Gráfica asociada orientada y su matriz de mallas ampliada.

Si se multiplica la matriz de mallas $[M]_a$ por el vector de tensiones de rama V se tienen m ecuaciones linealmente dependientes, es decir

$$[M]_a V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 + v_5 \\ v_4 - v_5 + v_6 \\ -v_2 - v_3 - v_6 \\ -v_1 + v_3 - v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que si se suprime el último renglón de la matriz, entonces

$$[M]V = 0 \quad \text{Ley de voltajes de Kirchhoff} \quad (4.5)$$

constituye un conjunto de $l = b - n_t + 1$ ecuaciones linealmente independientes.

Se define el *vector de corrientes de malla* I al vector columna cuyo m -ésimo elemento representa la corriente eléctrica de la m -ésima malla. Se puede aserir que

$$[M]^T I = J \quad (4.6)$$

4.4. Análisis por el método de nodos de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo

Se demostró que una rama común de una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo que tiene las formas mostradas en las figuras 4.3 y 4.4, satisface la ecuación (4.1)

$$j_k = y_k v_k + j_{sk} - y_k v_{sk}$$

si se consideran las b ramas de la red eléctrica, se tiene la siguiente ecuación matricial

$$J]_k = [Y]_k V]_k + J]_{sk} - [Y]_k V]_{sk} \quad (4.7)$$

donde $[Y]_k$ recibe el nombre de *matriz de admitancias de rama*, es una matriz diagonal (si no hay componentes eléctricos acoplados en la red eléctrica) cuyos elementos son las admitancias de cada una de las ramas que constituyen a la red eléctrica, esto es

$$[Y]_k = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & y_b \end{bmatrix}$$

$J]_{sk}$ y $V]_{sk}$ son los vectores cuyos elementos son las fuentes independientes de corriente y voltaje, respectivamente

$$J]_{sk} = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} \quad V]_{sk} = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix}$$

La expresión matricial (4.7) consta de b ecuaciones que involucran $2b$ incógnitas, por tanto es necesario efectuar algunas operaciones matriciales elementales para encontrar su solución.

Premultiplicando la ecuación (4.7) por la matriz de incidencia $[A]$

$$[A][J]_k = 0 = [A][Y]_k V]_k + [A]J]_{sk} - [A][Y]_k V]_{sk}$$

considerando la ecuación (4.4), $[A]^T E] = V]$

$$[A][Y]_k [A]^T E]_n = [A][Y]_k V]_{sk} - [A]J]_{sk}$$

si

$$[Y]_n \triangleq [A][Y]_k [A]^T \quad \text{Matriz de admitancias de nodo} \quad (4.8)$$

$$[I]_s \triangleq [A][Y]_k V]_{sk} - [A]J]_{sk} \quad \text{Vector de fuentes nodales de corriente} \quad (4.9)$$

$$[Y]_n E]_n = [I]_s \quad \text{Ecuación de nodos} \quad (4.10)$$

Ejemplo 4.3 Sea el circuito eléctrico que se muestra en la figura 4.13. Encuentre por medio del análisis de nodos las corrientes eléctricas y los voltajes de rama.

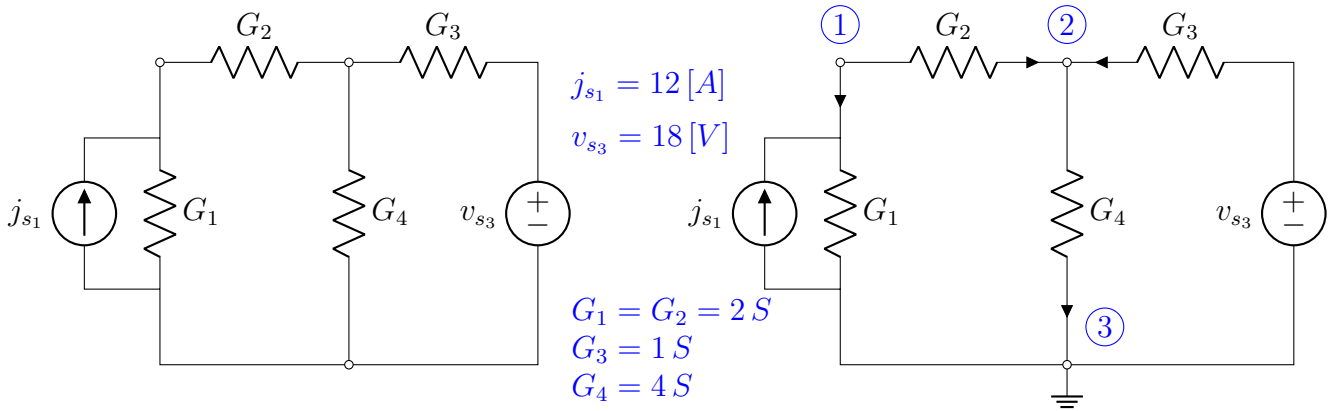


Figura 4.13: Circuito resistivo con fuentes independientes.

Procedimiento:

1. Se elige un nodo de referencia y se enumeran los nodos restantes.
2. Se enumeran las ramas y se les asigna una dirección de referencia.
3. Se escriben las ecuaciones de rama de la forma dada por la ecuación (4.1).

$$\begin{aligned} j_1 &= G_1 v_1 - j_{s1} \\ j_2 &= G_2 v_2 \\ j_3 &= G_3 v_3 + G_3 v_{s3} \\ j_4 &= G_4 v_4 \end{aligned}$$

4. Las ecuaciones anteriores se escriben en forma matricial, de acuerdo a la ecuación (4.7).

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -j_{s_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_{s_3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

5. Se determina la matriz de incidencia $[A]$.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Se premultiplica la ecuación (4.11) por la matriz de incidencia $[A]$ y se realiza la sustitución $V = [A]^T E$.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} [Y]_k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} -j_{s_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - [Y]_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_{s_3} \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

Ecuación que tiene la forma

$$0 = [Y]_n \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} - I_s$$

7. El resultado que se tiene al llevar a cabo las operaciones correspondientes es

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_3 v_{s_3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -j_{s_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{s_1} \\ G_3 v_{s_3} \end{bmatrix}$$

8. Se sustituyen los valores

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

se resuelve para el vector de tensiones de nodo

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

9. Con la ecuación (4.4), se calculan los voltajes de rama.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = [A]^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

10. Finalmente, con la ecuación (4.11), se encuentran las corrientes de rama

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -4 \\ 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -18 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

4.5. Fuentes controladas o dependientes

Ahora se presenta otro tipo de fuente llamada *fente controlada* o *fente dependiente*. Este tipo de fuente se dedica para modelizar ciertos dispositivos electrónicos. Por definición, una fuente controlada es un elemento que consta de dos ramas; la rama 1 puede ser un circuito abierto o un circuito cerrado y la rama 2 puede ser una fuente de voltaje o una fuente de corriente. La forma de onda de la fuente en la rama 2 es una función del voltaje de circuito abierto en la rama 1 o una función de la corriente eléctrica de corto circuito de la rama 1. En otras palabras, la fuente de la rama 2 está controlada por un voltaje o una corriente eléctrica de la rama 1.

En la figura 4.14 se expone la representación de estas fuentes. En los incisos (a) y (b) las fuentes en la rama 2 son fuentes de corriente; su valor depende, respectivamente, de la corriente eléctrica en la rama 1, que está en corto circuito y del voltaje en la rama 1, que está en circuito abierto. Estas fuentes controladas son llamadas *fente de corriente controlada por corriente* y *fente de corriente controlada por voltaje*. En los incisos (c) y (d) las fuentes en la rama 2 son fuentes de voltaje; su valor depende, respectivamente, del voltaje en la rama 1, que está en circuito abierto y de la corriente eléctrica en la rama 1, que está en corto circuito. Estas fuentes controladas son llamadas *fente de voltaje controlada por voltaje* y *fente de voltaje controlada por corriente*.

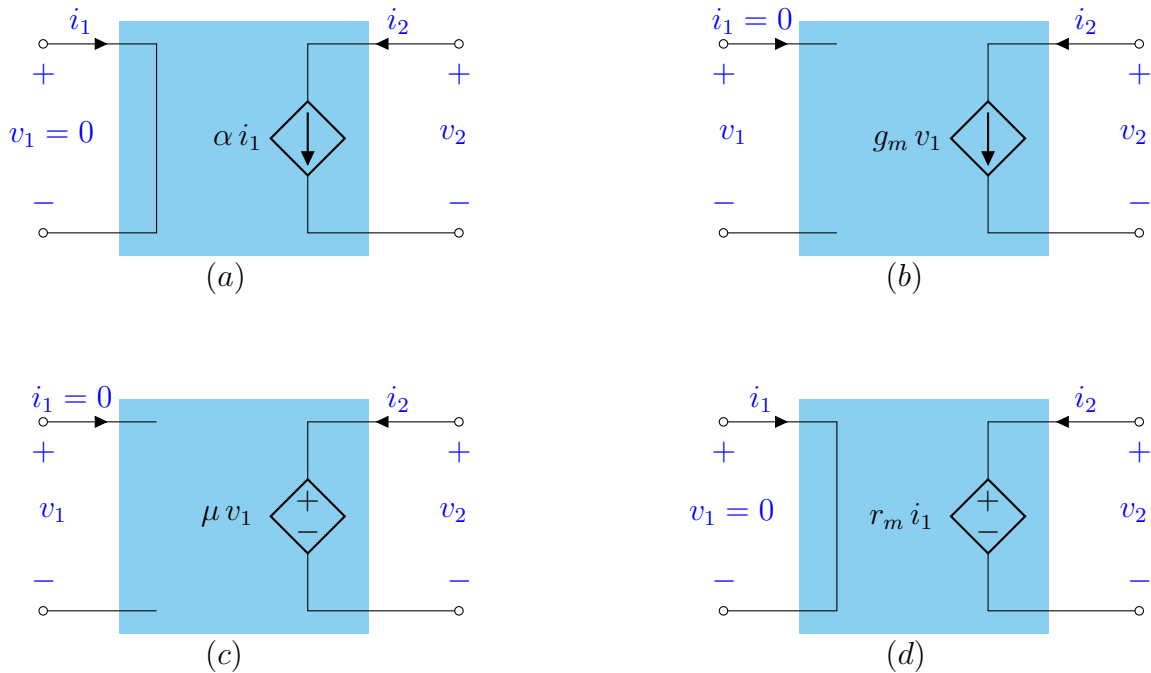


Figura 4.14: Fuentes controladas o fuentes dependientes.

Las cuatro fuentes controladas están caracterizadas por las ecuaciones que se muestran en la figura 4.14. Donde las unidades de las cuatro constantes de proporcionalidad α , g_m , μ y r_m son, respectivamente, sin dimensión, de conductancia, adimensional y de resistencia. Finalmente, debe tenerse presente que estas fuentes dependientes, así definidas, son elementos que satisfacen las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo.

4.6. Análisis en estado sinusoidal permanente

Si se considera que todas las fuentes independientes son sinusoidales de la misma frecuencia angular ω y que todos los voltajes y corrientes eléctricas han alcanzado su estado sinusoidal permanente. Para su análisis se recurre a los fasores. Así

$$\mathbf{J}_k = [Y(j\omega)]_k \mathbf{V}_k + \mathbf{J}_{sk} - [Y(j\omega)]_k \mathbf{V}_{sk}$$

realizando un procedimiento similar al que se efectuó antes, la ecuación de nodos es

$$[Y(j\omega)]_n \mathbf{E}_n = \mathbf{I}_s$$

donde la matriz de admitancias de nodo y el vector de fuentes nodales de corriente son

$$[Y(j\omega)]_n = [A][Y(j\omega)]_k [A]^T \quad e \quad \mathbf{I}_s = [A][Y(j\omega)]_k \mathbf{V}_{sk} - [A]\mathbf{J}_{sk}$$

4.6.1. Propiedades de la matriz de admitancias de nodo

1. Si la red eléctrica no tiene elementos acoplados (ni fuentes dependientes, ni inductancias mutuas)

$$\begin{aligned} [Y(j\omega)]_k & \text{ es una matriz diagonal} \\ [Y(j\omega)]_n & \text{ es una matriz simétrica} \end{aligned}$$

2. Si no hay fuentes dependientes (se permiten inductancias mutuas)

$$[Y(j\omega)]_k \quad y \quad [Y(j\omega)]_n \quad \text{son matrices simétricas}$$

4.6.2. Obtención de la ecuación de nodos por inspección

Como se ha visto, la ecuación de nodos tiene la siguiente estructura

$$\begin{bmatrix} y_{11}(j\omega) & y_{12}(j\omega) & \cdots & y_{1n}(j\omega) \\ y_{21}(j\omega) & y_{22}(j\omega) & \cdots & y_{2n}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1}(j\omega) & y_{n2}(j\omega) & \cdots & y_{nn}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{s_1} \\ \mathbf{i}_{s_2} \\ \vdots \\ \mathbf{i}_{s_n} \end{bmatrix}$$

si la red eléctrica no tiene elementos acoplados.

1. $y_{ii}(j\omega)$ es la suma de las admitancias de todas las ramas conectadas al nodo i , se denomina la autoadmitancia del nodo i .

2. $y_{ik}(j\omega)$ es el negativo de la suma de las admitancias de todas las ramas conectadas entre los nodos i y k , se denomina la admitancia mutua entre los nodos i y k .
3. Por medio del circuito eléctrico equivalente de Norton, todas las fuentes de voltaje se transforman en fuentes de corriente, entonces i_{sk} es la suma algebraica de todas las fuentes de corriente conectadas al nodo k . A las fuentes de corriente cuya dirección de referencia *entre* al nodo k se les asigna el signo positivo, a las otras se les asigna signo negativo.

Ejemplo 4.4 Encuentre las corrientes en los resistores del circuito eléctrico que se muestra en la figura 4.15.

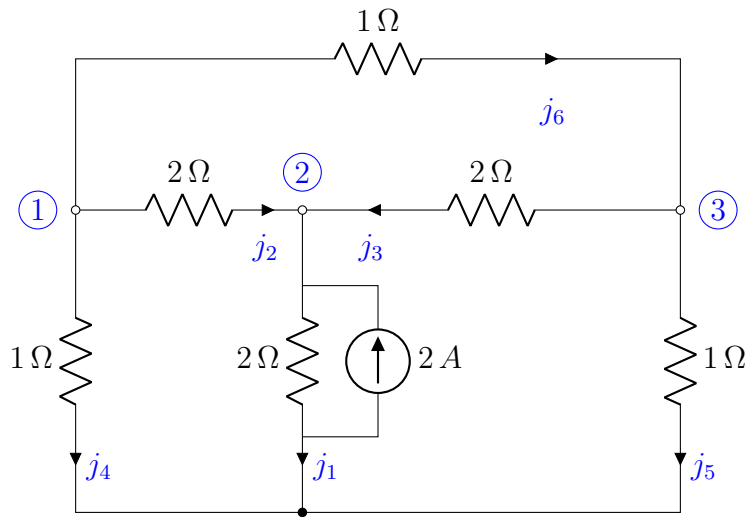


Figura 4.15: Circuito resistivo con una fuente de corriente independiente.

La ecuación de nodos se obtiene por inspección

$$\begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & -1/2 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para los voltajes de nodo

$$[E]_n = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz de incidencia es

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

los voltajes de rama son

$$[V]_k = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = [A]^T [E]_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ -8 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las corrientes de rama se determinan de la expresión

$$[J]_k = [Y]_k [V]_k + [J]_{sk} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ -8 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.7. Análisis por el método de mallas de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo

Sea η una red eléctrica con componentes lineales e invariantes en el tiempo de b ramas y n_t nodos. G su gráfica asociada conectada, plana y no pivotante. Si las fuentes sinusoidales son de la misma frecuencia angular ω , $\mathbf{V}_{sk}$ y $\mathbf{J}_{sk}$ son los vectores $(b \times 1)$ cuyas k -ésimas componentes representan los fasores asociados a las fuentes sinusoidales de la k -ésima rama. De forma similar, $\mathbf{V}_k$ y $\mathbf{J}_k$ son los vectores $(b \times 1)$ cuyas k -ésimas componentes representan los fasores asociados a v_k y j_k , respectivamente. Sea $\mathbf{I}_m$ el vector $(l \times 1)$ cuyas componentes constituyen los fasores que representan las corrientes de malla $i_1, i_2, \dots, i_l$.

La ecuación de las ramas en forma matricial es

$$\mathbf{V}_k = [Z(j\omega)]_k \mathbf{J}_k + \mathbf{V}_{sk} - [Z(j\omega)]_k \mathbf{J}_{sk} \quad (4.12)$$

donde $[Z(j\omega)]_k$ es una matriz cuadrada de $b \times b$, denominada *matriz de impedancias de rama* y es una matriz diagonal, si no hay elementos acoplados, es decir

$$[Z(j\omega)]_k = \begin{bmatrix} z_1(j\omega) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2(j\omega) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_b(j\omega) \end{bmatrix}$$

premultiplicando la ecuación (4.12) por la matriz de mallas $[M]$ y recordando que $[M] \mathbf{V} = 0$ y $[M]^T \mathbf{I} = \mathbf{J}$, se tiene

$$[M][Z(j\omega)]_k [M]^T \mathbf{I}_m = [M][Z(j\omega)]_k \mathbf{J}_{sk} - [M] \mathbf{V}_{sk}$$

si

$$[Z(j\omega)]_m \triangleq [M][Z(j\omega)]_k [M]^T \text{ Matriz de impedancias de malla} \quad (4.13)$$

donde $[Z(j\omega)]_m$ es una matriz de $(l \times l)$.

$$[\mathbf{E}]_s \triangleq [M][Z(j\omega)]_k \mathbf{J}_{sk} - [M] \mathbf{V}_{sk} \quad \text{Vector de fuentes de voltaje de malla} \quad (4.14)$$

y $[\mathbf{E}]_s$ es un vector de $(l \times 1)$. Finalmente

$$[Z(j\omega)]_m \mathbf{I}_m = [\mathbf{E}]_s \quad \text{Ecuacion de mallas} \quad (4.15)$$

Ejemplo 4.5 Mediante el método de mallas, encuentre las corrientes en los resistores del circuito eléctrico que se muestra en la figura 4.16.

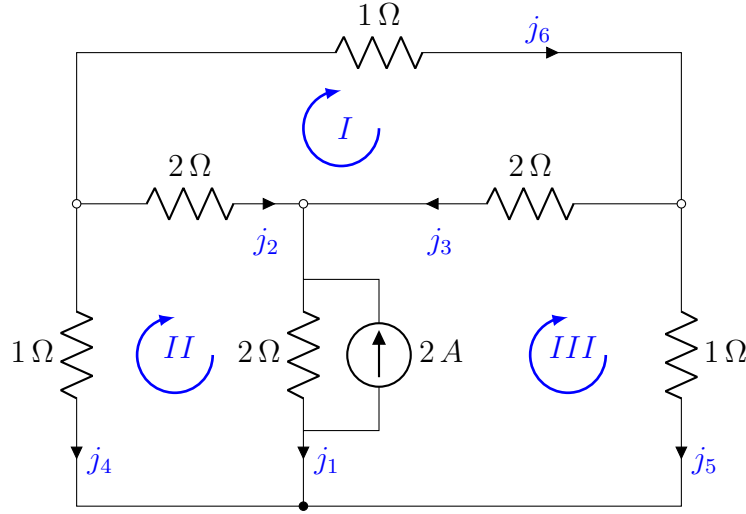


Figura 4.16: Circuito resistivo con una fuente de corriente independiente.

De la ecuación (4.12)

$$V]_k = [Z]_k J]_k + V]_{sk} - [Z]_k J]_{sk}$$

se tiene

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Premultiplicando por $[M]$ y sustituyendo $J]_k = [M]^T I]_m$, es posible determinar las corrientes de malla, las corrientes de rama y finalmente los voltajes de rama.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 21 & 14 & 14 \\ 14 & 21 & 14 \\ 14 & 14 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 0 \\ -28 \\ 28 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 0 \\ -28 \\ 28 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

finalmente

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ -8 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.7.1. Propiedades de la matriz de impedancias de malla

1. Si la red eléctrica no tiene elementos acoplados (ni fuentes dependientes, ni inductancias mutuas)

$$\begin{aligned} [Z(j\omega)]_k & \text{ es una matriz diagonal} \\ [Z(j\omega)]_m & \text{ es una matriz simétrica} \end{aligned}$$

2. Si no hay fuentes dependientes (se permiten inductancias mutuas)

$$[Z(j\omega)]_k \quad \text{y} \quad [Z(j\omega)]_m \quad \text{son matrices simétricas}$$

4.7.2. Obtención de la ecuación de mallas por inspección

La ecuación de mallas tiene la siguiente estructura

$$\begin{bmatrix} z_{11}(j\omega) & z_{12}(j\omega) & \cdots & z_{1m}(j\omega) \\ z_{21}(j\omega) & z_{22}(j\omega) & \cdots & z_{2m}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{m1}(j\omega) & z_{m2}(j\omega) & \cdots & z_{mm}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{s_1} \\ \mathbf{e}_{s_2} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{s_m} \end{bmatrix}$$

si la red eléctrica no tiene elementos acoplados.

1. $z_{ii}(j\omega)$ es la suma de las impedancias de todas las ramas en la malla i , se denomina la auto-impedancia de la malla i .
2. $z_{ik}(j\omega)$ es el negativo de la suma de las impedancias de todas las ramas que son comunes a las mallas i y k , se denomina la impedancia mutua entre las mallas i y k .
3. Por medio del circuito eléctrico equivalente de Thévenin, todas las fuentes de corriente se transforman en fuentes de voltaje, entonces $\mathbf{e}_{sk}$ es la suma algebraica de todas las fuentes de voltaje en la malla k . A las fuentes de voltaje cuya dirección de referencia empuje a la corriente eléctrica en la dirección de referencia de la malla se le asigna el signo positivo en caso contrario signo negativo.

4.8. Método abreviado

Cuando la red eléctrica que se estudia involucra fuentes dependientes o controladas, las ecuaciones de nodos y de mallas se pueden encontrar por inspección, si se considera la siguiente idea: *tratar a las fuentes dependientes como si fuesen independientes*, y en el último paso expresar tales fuentes dependientes en términos de las variables adecuadas. Como un ejemplo de lo anterior, considere el siguiente ejercicio.

Ejemplo 4.6 Encuentre la ecuación diferencial que relaciona la corriente eléctrica $i_g(t)$ de la fuente independiente de corriente y el voltaje $v_1(t)$ del circuito eléctrico de la figura 4.17.

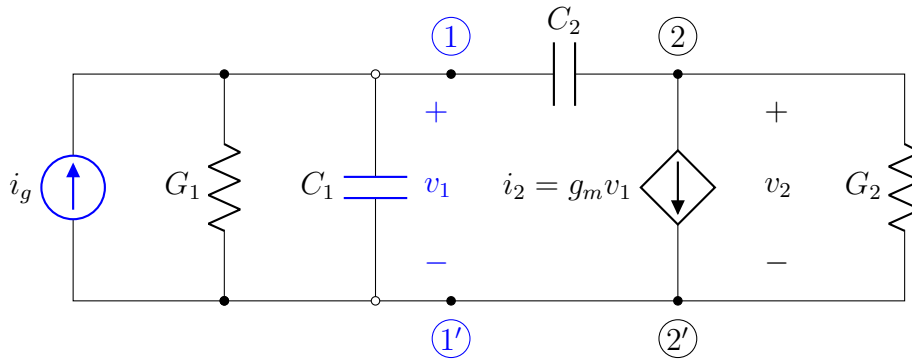


Figura 4.17: Circuito eléctrico con una fuente controlada.

Considerando a la *fuentes de corriente controlada por voltaje* como una fuente independiente de corriente, la ecuación de nodos, por inspección, resulta

$$\begin{bmatrix} G_1 + sC_1 + sC_2 & -sC_2 \\ -sC_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g(s) \\ -g_m V_1(s) \end{bmatrix}$$

reacomodando términos, se tiene

$$\begin{bmatrix} G_1 + s(C_1 + C_2) & -sC_2 \\ g_m - sC_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

la función de transferencia correspondiente es

$$\frac{V_1(s)}{I_g(s)} = \frac{C_2 s + G_2}{C_1 C_2 s^2 + (C_1 G_2 + C_2 (g_m + G_1 + G_2)) s + G_1 G_2}$$

$$\frac{V_1(s)}{I_g(s)} = \frac{\frac{1}{C_1} s + \frac{G_2}{C_1 C_2}}{s^2 + \left(\frac{G_2}{C_2} + \frac{g_m + G_1 + G_2}{C_1} \right) s + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}$$

a partir de la función de transferencia, la ecuación diferencial, que modeliza el circuito eléctrico, se puede deducir fácilmente

$$\frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} + \left(\frac{G_2}{C_2} + \frac{g_m + G_1 + G_2}{C_1} \right) \frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2} v_1(t) = \frac{1}{C_1} \frac{di_g(t)}{dt} + \frac{G_2}{C_1 C_2} i_g(t)$$

Ejemplo 4.7 Encuentre la función de transferencia del circuito eléctrico que se muestra en la figura 4.18a.

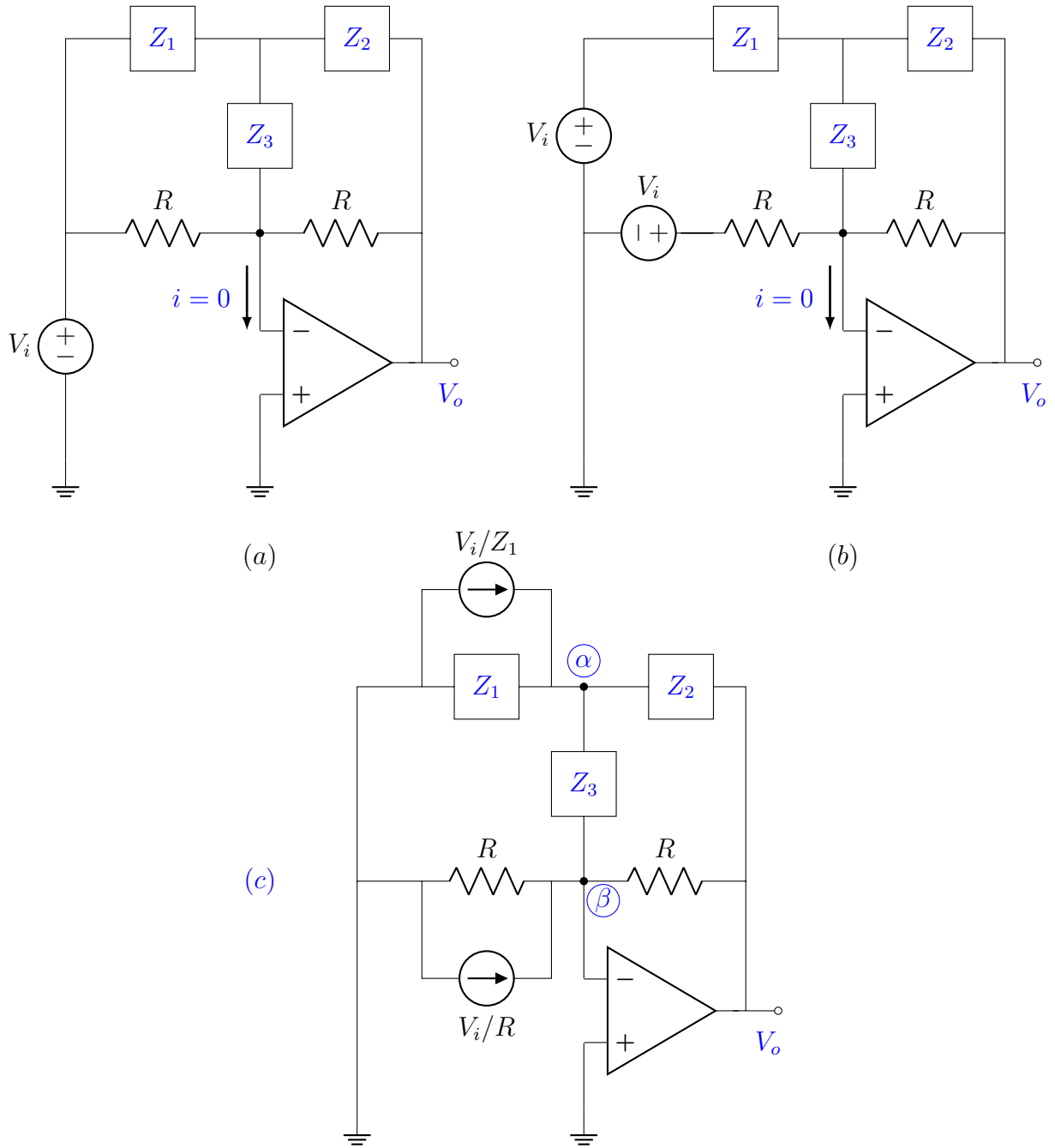


Figura 4.18: Etapa básica de un ecualizador.

Una forma de obtener la función de transferencia del circuito eléctrico, es mediante el análisis por el método de nodos. Sin embargo, para poder emplear tal procedimiento, se requiere que las fuentes de corriente y de voltaje sean fuentes reales. Así pues, la fuente ideal de voltaje V_i se convierte en una fuente real de voltaje desplazándola como se muestra en la figura 4.18b.

A continuación, se obtiene la ecuación de nodos por inspección, por lo que es necesario transformar

las fuentes de voltaje en fuentes de corriente, empleando el circuito eléctrico equivalente de Norton. El resultado de lo anterior se observa a la figura 4.18c.

Teniendo presente que el voltaje del nodo $\textcircled{\beta}$, es cero (*tierra virtual*); la ecuación de nodos resulta:

Nodo $\textcircled{\alpha}$

$$\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)V_\alpha - \frac{1}{Z_2}V_o = \frac{1}{Z_1}V_i \quad (4.16)$$

Nodo $\textcircled{\beta}$

$$-\frac{1}{Z_3}V_\alpha - \frac{1}{R}V_o = \frac{1}{R}V_i \quad (4.17)$$

de (4.17)

$$V_\alpha = -\frac{Z_3}{R}(V_i + V_o)$$

en la (4.16)

$$-\frac{\Delta}{Z_1 Z_2 Z_3} \frac{Z_3}{R}(V_i + V_o) - \frac{1}{Z_2}V_o = \frac{1}{Z_1}V_i \quad (4.18)$$

donde

$$\Delta = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$$

agrupando términos, finalmente, la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{\frac{Z_2}{\Delta} + \frac{1}{R}}{\frac{Z_1}{\Delta} + \frac{1}{R}}$$

4.9. Escalamiento de impedancia y de frecuencia

Estos dos teoremas, son de gran trascendencia ya que su utilidad y empleo permite la realización de *sistemas, filtros o ecualizadores* con valores de resistores, inductores y capacitores comerciales a partir de tablas normalizadas.

4.9.1. Escalamiento de impedancia

Considere una red eléctrica de parámetros concentrados constituida por elementos lineales e invariantes en el tiempo, cuya entrada es la fuente independiente de voltaje $v_s(t)$ y la salida es el voltaje $v_o(t)$, correspondiente a una rama arbitraria de la misma red, su gráfica asociada se observa en la figura 4.19.

El voltaje V_o de la rama eléctrica con impedancia Z_o , está dado por

$$V_o = Z_o(I_i - I_j) \quad (4.19)$$

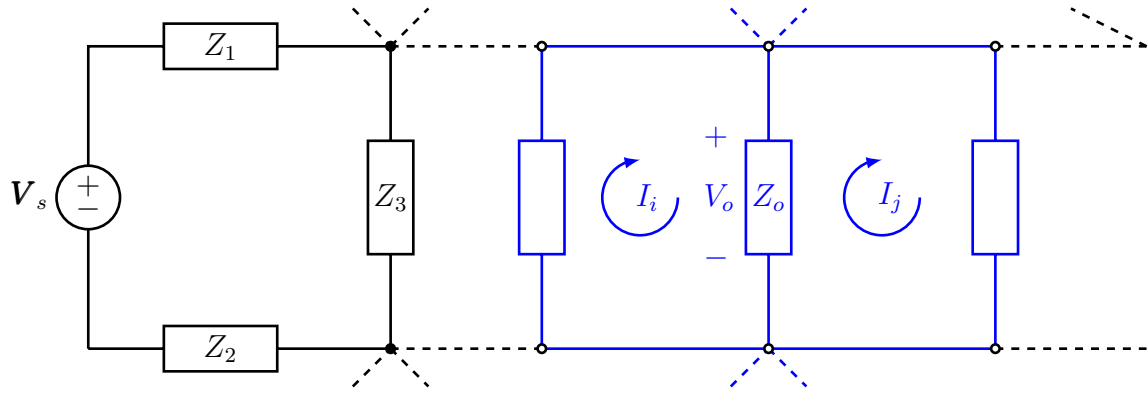


Figura 4.19: Red eléctrica plana con elementos lineales e invariantes en el tiempo.

Por otra parte, la ecuación de mallas de la red eléctrica es

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(j\omega) & Z_{12}(j\omega) & \cdots & Z_{1m}(j\omega) \\ Z_{21}(j\omega) & Z_{22}(j\omega) & \cdots & Z_{2m}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{m1}(j\omega) & Z_{m2}(j\omega) & \cdots & Z_{mm}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

resolviendo para $\mathbf{I}_i$ e $\mathbf{I}_j$

$$\mathbf{I}_i = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(i-1)} & \mathbf{V}_s & Z_{1(i+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(i-1)} & 0 & Z_{m(i+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{I}_j = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(j-1)} & \mathbf{V}_s & Z_{1(j+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & 0 & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}} \quad (4.22)$$

Si se define

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (4.23)$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(i-1)} & Z_{2(i+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(i-1)} & Z_{m(i+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (4.24)$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(j-1)} & Z_{2(j+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

Considerando las ecuaciones (4.19), (4.21), (4.22), (4.23), (4.24) y (4.25) se tiene

$$\mathbf{V}_o = Z_o \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} \mathbf{V}_s \quad (4.26)$$

por lo que la función de transferencia resulta

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = Z_o \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} \quad (4.27)$$

Si todas las impedancias que constituyen la red eléctrica se multiplican por un factor k , de la ecuación (4.27), se tiene

$$\frac{\mathbf{V}'_o}{\mathbf{V}_s} = k Z_o \frac{(\Delta'_i - \Delta'_j)}{\Delta'} \quad (4.28)$$

donde por álgebra de determinantes

$$\begin{aligned} \Delta'_i &= k^{m-1} \Delta_i \\ \Delta'_j &= k^{m-1} \Delta_j \\ \Delta' &= k^m \Delta \end{aligned} \quad (4.29)$$

sustituyendo la ecuación (4.29) en la ecuación (4.28)

$$\frac{\mathbf{V}'_o}{\mathbf{V}_s} = k Z_o \frac{k^{m-1} (\Delta_i - \Delta_j)}{k^m \Delta} = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} \quad (4.30)$$

de la expresión anterior se concluye lo siguiente:

Si en una red eléctrica se multiplican todas las impedancias por una misma constante arbitraria, k , la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

En función de los elementos que conforman la red eléctrica:

Si en una red eléctrica todas las resistencias e inductancias que la constituyen se multiplican por una constante arbitraria k y las capacitancias de la misma red se dividen por la constante arbitraria k , la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

4.9.2. Escalamiento de frecuencia

La respuesta de estado sinusoidal permanente de un sistema lineal, invariante en el tiempo y estable debida a una entrada de la forma $x(t) = \sin(\omega t)$ está dada por

$$y(t) = |H(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \angle H(j\omega)) \quad (4.31)$$

donde $H(j\omega)$ es la función de transferencia de la red eléctrica, $H(s)$, evaluada en el eje imaginario del plano complejo, es decir

$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$$

En una red eléctrica dada de b ramas, la función de transferencia depende de la frecuencia angular y de los valores de los componentes eléctricos que la conforman, esto es

$$H(j\omega) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega L_1, \dots, j\omega L_b, j\omega C_1, \dots, j\omega C_b)$$

Para una frecuencia angular ω_1 , se tiene

$$H(j\omega_1) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega_1 L_1, \dots, j\omega_1 L_b, j\omega_1 C_1, \dots, j\omega_1 C_b) \quad (4.32)$$

Para una frecuencia angular ω_2 y suponiendo que las inductancias y las capacitancias de cada rama de la red eléctrica se pueden modificar

$$H(j\omega_2) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega_2 L'_1, \dots, j\omega_2 L'_b, j\omega_2 C'_1, \dots, j\omega_2 C'_b) \quad (4.33)$$

Ahora, si se desea que las respuestas en frecuencia, dadas por las ecuaciones (4.32) y (4.33), presenten las mismas características, de magnitud y fase, se requiere

$$\omega_1 L_n = \omega_2 L'_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b$$

y

$$\omega_1 C_n = \omega_2 C'_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b$$

por consiguiente, los nuevos valores de los elementos inductivos y capacitivos para que se cumpla lo dicho en el párrafo anterior son

$$L'_n = \frac{\omega_1}{\omega_2} L_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b \quad (4.34)$$

$$C'_n = \frac{\omega_1}{\omega_2} C_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b \quad (4.35)$$

por lo que se infiere: si se desea que la respuesta sinusoidal permanente de una red eléctrica a una cierta frecuencia angular ω_2 presente las mismas características de magnitud y fase que se tienen para una frecuencia ω_1 , los inductores y los capacitores que constituyen la red eléctrica deben modificarse de acuerdo a las ecuaciones (4.34) y (4.35).

Ejemplo 4.8 En la figura 4.20, se presenta la curva de resonancia $|Z(j\omega)|$ en $[\Omega]$ versus ω en $[rad/seg]$ de un circuito eléctrico RLC paralelo.

1. Encuentre los valores de R, L y C.
2. El mismo comportamiento de resonancia se desea alrededor de la frecuencia central de 20 $[kHz]$. El máximo valor de $|Z(j\omega)|$ debe ser de 0.1 $[M\Omega]$. determine los nuevos valores de R, L y C.

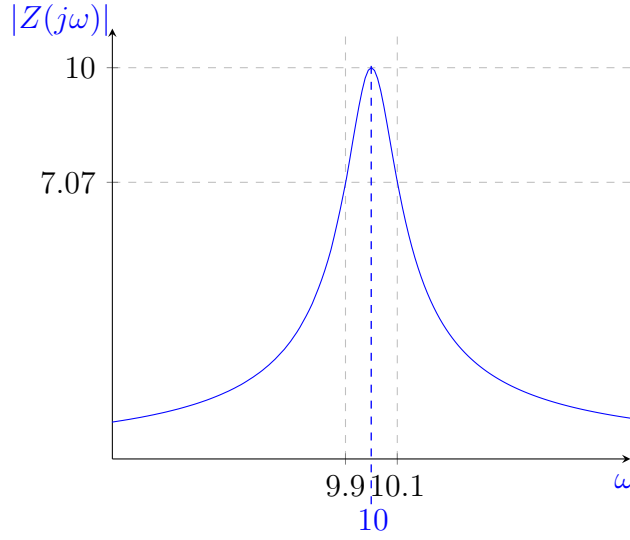


Figura 4.20: Curva de resonancia de un circuito eléctrico RLC paralelo.

De la figura se puede obtener la siguiente información:

$$\text{frecuencia de resonancia } \omega_o = 10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right]$$

$$\text{ancho de banda } AB = \omega_2 - \omega_1 = 10.1 - 9.9 = 0.2 \left[\frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right]$$

Por consiguiente, el factor de calidad es

$$Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} = 50$$

y dado que

$$Z(j\omega) = \frac{R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}$$

entonces $Z(j\omega_o) = Z(j\omega)|_{\omega=\omega_o} = R = 10 \text{ } [\Omega]$. Con este valor y si $Q = RC\omega_o = R\sqrt{\frac{C}{L}}$, es posible obtener el valor de C. Así

$$C = \frac{Q}{R\omega_o} = 0.5[F]$$

Ahora, como $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, el valor de la inductancia es $L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = 0.02[H]$.

Para la segunda parte del ejercicio, en primer lugar se lleva cabo el escalamiento de impedancia, ya que se desea un resistor de $100 \text{ } [k\Omega]$, se calcula el factor de escala. Si $R_f = 10^5 = kR_i = k10$, entonces $k = 10^4$. De esta manera

$$L_j = kL_i = 200 \text{ } [H] \quad \text{y} \quad C_j = \frac{C}{k} = 50[\mu F]$$

A continuación se realiza el escalamiento de frecuencia y teniendo presente que el resistor *no cambia* su resistencia con la frecuencia

$$L_f = \frac{\omega_j L_j}{\omega_f} = \frac{10 \times 200}{2\pi(20 \times 10^3)} = 15.915[mH]$$

$$C_f = \frac{\omega_j C_j}{\omega_f} = \frac{10 \times 50 \times 10^{-6}}{2\pi(20 \times 10^3)} = 3.9789[\eta H]$$

En la figura 4.21 se presentan las formas de magnitud de la impedancia del circuito eléctrico RLC paralelo en función de la frecuencia con los valores obtenidos.

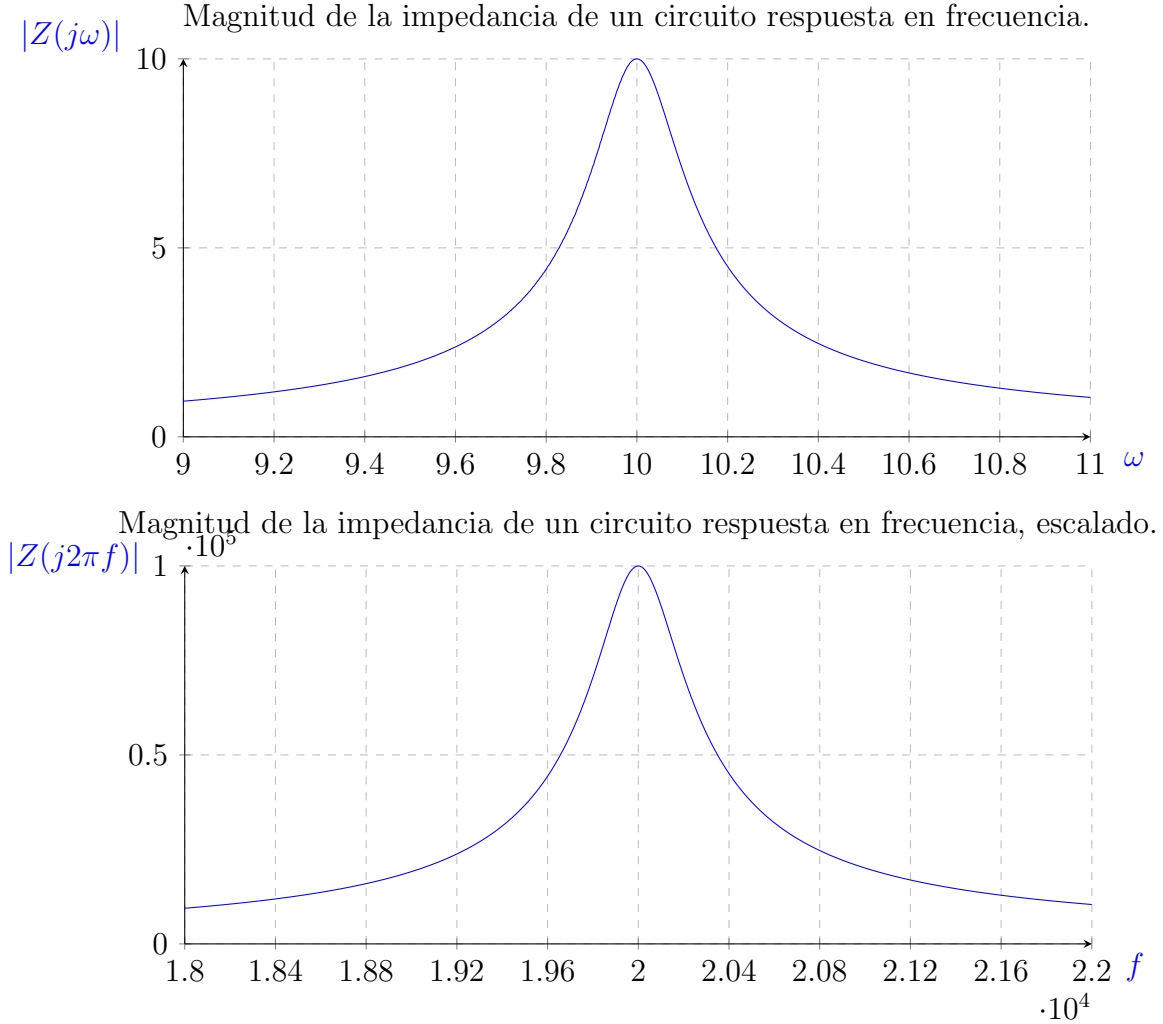


Figura 4.21: Magnitud de la impedancia de entrada de un circuito RLC paralelo sin escalar y con escalamiento de impedancia y de frecuencia.

4.9.3. Desnormalización de una función de transferencia

Dada una función de transferencia $H(s)$ que presenta alguna característica de interés, verbigracia: ganancia máxima, ganancia de 3 dB por debajo de la ganancia máxima, ángulo de fase, etc. para una frecuencia $\omega = 1$, se puede afirmar que la función de transferencia

$$G(s) = H\left(\frac{s}{\omega_n}\right) \quad (4.36)$$

presenta la misma característica de interés en $\omega = \omega_n$.

Ejemplo 4.9 Si

$$H(s) = \frac{\sqrt{2}s}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

es la función de transferencia de un filtro pasa banda con frecuencia de resonancia $\omega_o = 1$. Encuentre la función de transferencia con las mismas características, pero con una frecuencia de resonancia $\omega_o = 10$.

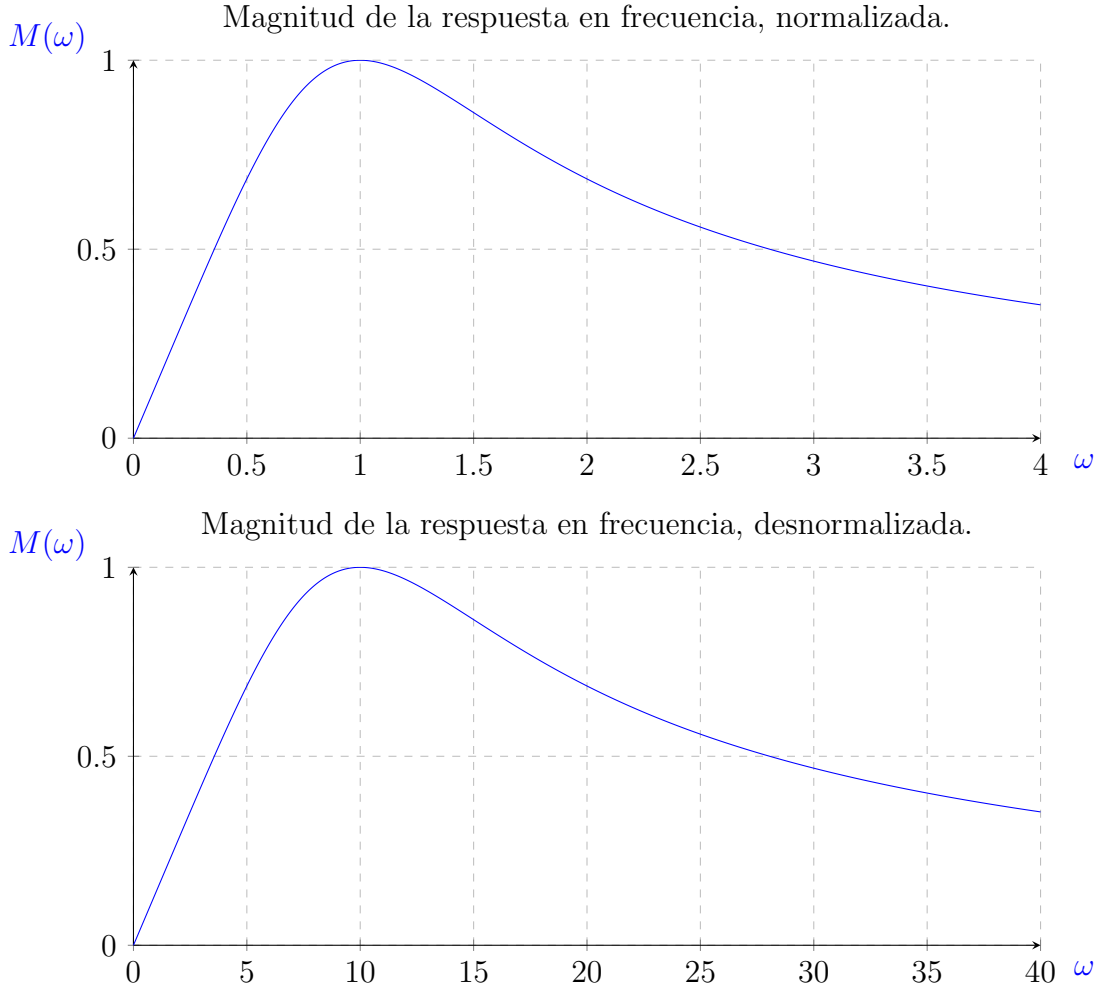


Figura 4.22: Magnitud de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia: *normalizada* y *desnormalizada*.

De la ecuación (4.36)

$$G(s) = H\left(\frac{s}{10}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{s}{10}\right)}{\left(\frac{s}{10}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{10}\right) + 1} = \frac{10\sqrt{2}s}{s^2 + 10\sqrt{2}s + 100}$$

La figura 4.22 muestra los resultados obtenidos.