

Apéndices

Víctor Manuel Sánchez Esquivel

Índice general

Apéndice A. Representación de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo mediante ecuaciones diferenciales	5
Apéndice B. Ecuaciones diferenciales y función de transferencia	9
Apéndice C. El Amplificador Operacional	11

Apéndice A

Representación de circuitos eléctricos lineales e invariantes en el tiempo mediante ecuaciones diferenciales

Para poder llevar a cabo el estudio y análisis de un sistema en general (*circuito eléctrico en particular*) es necesario contar con una representación o modelo del mismo. El establecimiento del prototipo de un sistema físico constituye la etapa más crítica en el estudio, análisis y diseño de los sistemas ya que debe relacionar de manera cuantitativa las diversas variables del mismo. Un modelo se podría definir como *una representación de los aspectos esenciales de un sistema, que implican un conocimiento de su comportamiento y que se puede emplear de forma útil*. Para que la representación o modelo tenga alguna utilidad, no debe ser tan complicado que no se pueda entender y por consiguiente inadecuado para el análisis; o ser tan simple y trivial hasta el punto en que las predicciones sobre su funcionamiento sean burdas e incongruentes.

Existen dos tipos de circuitos eléctricos, *circuitos de parámetros concentrados* y *circuitos de parámetros distribuidos*. Baste decir aquí, que en un *elemento eléctrico concentrado* de dos terminales, el voltaje y la corriente asociados a él, son cantidades bien definidas en todo instante de tiempo.

Cuando se analizan circuitos eléctricos resistivos, un modelo se obtiene a partir de un conjunto de ecuaciones de nodo o de ecuaciones de malla, las cuales son ecuaciones algebraicas. Sin embargo, para circuitos con elementos que almacenan energía, tales como inductores y capacitores, las ecuaciones que los modelan ya no son más algebraicas.

Los circuitos eléctricos que serán analizados y en general todos los sistemas están integrados por elementos interconectados. Para cada elemento existen leyes físicas que pueden representarse por relaciones matemáticas entre las variables asociadas a tal elemento. Dichas leyes se denominan *leyes de elemento*. Además de éstas existen otras, llamadas *leyes de conjunto* que relacionan las variables de los diversos elementos que constituyen el circuito eléctrico.

Los circuitos eléctricos que se estudian en esta asignatura se pueden modelar por medio de una ecuación diferencial lineal ordinaria de la forma

$$\sum_{n=0}^N a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M b_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (\text{A.1})$$

Esta ecuación describe un sistema lineal de orden N, donde N representa la máxima derivada de la única salida del circuito eléctrico y M, es la máxima derivada de la única entrada del circuito eléctrico.

Por otro lado, si los coeficientes en la ecuación (A.1) no dependen del tiempo, es decir son constantes, entonces la ecuación

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (\text{A.2})$$

describe un circuito eléctrico lineal e *invariante en el tiempo, fijo o estacionario*.

La solución de la ecuación (A.1) o (A.2) consta de dos partes, la primera de ellas, cuando la entrada es nula, se denomina función complementaria (de los matemáticos clásicos), respuesta natural o respuesta libre. Actualmente, se acostumbra de llamarla *respuesta de entrada cero*, y se debe a la energía almacenada en el sistema. La otra parte de la solución es la solución de la ecuación no homogénea y es la integral particular (de los matemáticos clásicos), solución particular o respuesta forzada. Se le conoce como *respuesta de estado cero* (o respuesta de estado de energía inicial nula), lo que indica que la energía inicial es cero y se debe por entero a la entrada. Matemáticamente, lo anterior se expresa de la siguiente manera

$$y(t) = y(t)_{zi} + y(t)_{zs} \quad (\text{A.3})$$

La respuesta de estado cero de un sistema *lineal* y *causal* descrito por la ecuación (A.1), está dada por la siguiente expresión

$$y(t)_{zi} = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t, \tau)d\tau \quad (\text{A.4})$$

Y la respuesta completa de un sistema lineal caracterizado por la ecuación (A.2) es de la forma

$$y(t) = \sum_{n=1}^N C_n e^{s_n t} + \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (\text{A.5})$$

donde las s_n son las raíces de la ecuación característica y se conocen como *eigenvalores* o simplemente *valores característicos*.

$$\sum_{n=0}^N a_n s^n = 0 \quad (\text{A.6})$$

La integral de la ecuación (A.5), correspondiente a la respuesta de estado cero recibe diversos nombres, entre otros *integral de convolución*, *integral de Helmholtz* o *integral de superposición*. El término convolución aparece más frecuentemente, pero el término de *superposición* es más descriptivo, no sólo por la naturaleza de la integral en sí misma, sino porque nos recuerda que sólo se aplica para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Por otra parte, las definiciones de *respuesta transitoria* y de *respuesta de estado permanente*, se pueden proporcionar de manera concisa. La respuesta transitoria es la parte de la respuesta completa que se hace cero cuando t tiende a infinito. La respuesta de estado permanente es la parte de la respuesta completa que no se hace cero cuando t tiende a infinito.

Ejemplo A.1 Encuentre el voltaje del capacitor $v_C(t)$, para $-\infty < t < \infty$, de la red eléctrica que se muestra en la figura A.1.

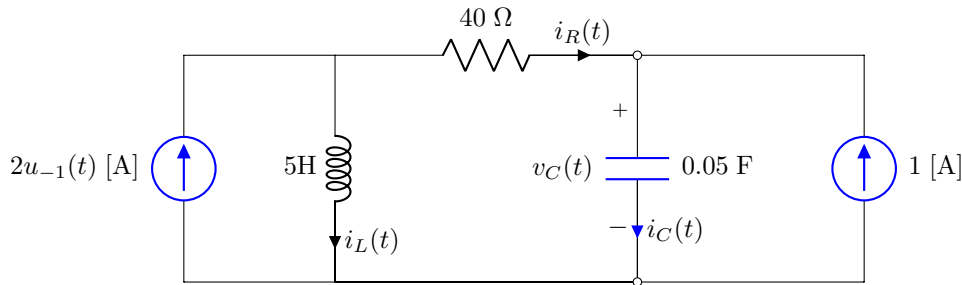


Figura A.1. Red eléctrica de segundo orden.

Como la red eléctrica en cuestión es lineal, es posible aplicar el principio de superposición. Con las *condiciones iniciales nulas*. Los valores de voltajes y corrientes eléctricas, se determinan teniendo presente que antes de que la fuente de corriente independiente de la izquierda se active en $t = 0$, la red eléctrica se encuentra en estado permanente, y la corriente eléctrica de la fuente de corriente independiente de la derecha fluye completamente (de derecha a izquierda) a través del resistor y del inductor. ¿Por qué?

Entonces

$$\begin{aligned} i_R(t) &= -1 \text{ [A]} & v_R(t) &= -40 \text{ [V]} \\ i_L(t) &= 1 \text{ [A]} & v_L(t) &= 0 \text{ [V]} \\ i_C(t) &= 0 \text{ [A]} & v_C(t) &= 40 \text{ [V]} \end{aligned}$$

Para determinar el efecto de la otra fuente de corriente independiente, se obtiene a continuación la ecuación diferencial que lo describe o modela (*Se pone en circuito abierto la fuente de corriente independiente de 1 [A]*). Las ecuaciones de conjunto, se obtienen a partir de las leyes de Kirchhoff. De la LCK se deduce

$$\begin{aligned} i_s(t) &= i_L(t) + i_R(t) \\ &= i_L(t) + i_C(t) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

De la LVK

$$\begin{aligned} v_L(t) &= v_R(t) + v_C(t) \\ &= Ri_R(t) + v_C(t) \\ &= Ri_C(t) + v_C(t) \\ &= RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \\ L \frac{di_L(t)}{dt} &= RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

considerando la ecuación (A.7) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} L \frac{d}{dt} [i_s(t) - i_C(t)] &= L \frac{di_s(t)}{dt} - LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} \\ &= RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

agrupando términos

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{1}{C} \frac{di_s(t)}{dt} \quad (\text{A.10})$$

sustituyendo valores de los parámetros

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 8 \frac{dv_C(t)}{dt} + 4v_C(t) = 20 \frac{di_s(t)}{dt} \quad (\text{A.11})$$

La ecuación característica es

$$s^2 + 8s + 4 = 0$$

por lo que los valores característicos son

$$\begin{aligned} s_1 &= -4 + 2\sqrt{3} \\ s_1 &= -4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la respuesta al impulso resulta

$$h(t) = \frac{5}{\sqrt{3}} \left[(4 + 2\sqrt{3})e^{-(4+2\sqrt{3})t} - (4 - 2\sqrt{3})e^{-(4-2\sqrt{3})t} \right] u_{-1}(t)$$

Y el voltaje del capacitor de estado cero (debido a la fuente de corriente independiente $i_s(t) = 2u_{-1}(t)$) es

$$\begin{aligned} v_{Czs}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{5}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(4 + 2\sqrt{3})e^{-(4+2\sqrt{3})\tau} - (4 - 2\sqrt{3})e^{-(4-2\sqrt{3})\tau} \right] u_{-1}(\tau) 2 u_{-1}(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{10}{\sqrt{3}} \int_0^t \left[(4 + 2\sqrt{3})e^{-(4+2\sqrt{3})\tau} - (4 - 2\sqrt{3})e^{-(4-2\sqrt{3})\tau} \right] d\tau \\ &= \frac{10}{\sqrt{3}} \left[e^{-(4+2\sqrt{3})t} - e^{-(4-2\sqrt{3})t} \right] u_{-1}(t) \end{aligned}$$

Finalmente, la respuesta debida a ambas fuentes de corriente independientes, es por consiguiente

$$v_{c_{zs}} = 40 + \frac{10}{\sqrt{3}} [e^{-(4+2\sqrt{3})t} - e^{-(4-2\sqrt{3})t}] u_{-1}(t)$$

Se debe percatar que la función escalón unitario se utiliza únicamente para enfatizar que la función a la que está multiplicando sólo tiene validez para $t \geq 0$.

Apéndice B

Ecuaciones diferenciales y función de transferencia

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo con una sola entrada $x(t)$ y una sola salida $y(t)$. Si se puede describir por una ecuación diferencial, entonces los coeficientes serán constantes y para un sistema de orden N la descripción está dada por la ecuación (B.1)

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (\text{B.1})$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial se obtiene:

$$\sum_{n=0}^N a_n s^n Y(s) - \sum_{n=1}^N a_n \left\{ \sum_{k=1}^n y^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\} = \sum_{n=0}^M b_n s^n X(s) - \sum_{n=1}^M b_n \left\{ \sum_{k=1}^n x^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\} \quad (\text{B.2})$$

donde $y^{k-1}(0^-)[x^{k-1}(0^-)]$ es la $(k-1)$ -ésima derivada de $y(t)[x(t)]$ evaluada en $t = 0^-$.

Despejando a $Y(s)$

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{n=0}^N a_n \left\{ \sum_{k=1}^n y^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\}}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} \right] + \left[\frac{\sum_{n=0}^M b_n s^n}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} + \frac{\sum_{n=1}^M b_n \left\{ \sum_{k=1}^n x^{k-1}(0^-) s^{n-k} \right\}}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} \right] \quad (\text{B.3})$$

o en forma simbólica

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s) \quad (\text{B.4})$$

La transformada inversa de Laplace del primer término de la derecha de la ecuación (B.4) es la respuesta de entrada cero, mientras que la transformada inversa de Laplace del segundo término de la derecha es la respuesta de estado cero. La función de transferencia se define como la razón de transformada de Laplace de la salida a la transformada de Laplace de la entrada cuando todas las condiciones son nulas. Luego entonces

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{n=1}^M b_n s^n}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} \quad x^{k-1}(0^-) = y^{k-1}(0^-) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Apéndice C

El Amplificador Operacional

El amplificador operacional se puede considerar, esencialmente, una fuente de voltaje controlada por voltaje en el que la ganancia de voltaje diferencial, A_d , es muy grande. El modelo elemental del amplificador operacional se exhibe en la figura C.1. Este dispositivo electrónico consta de varias terminales, pero por simplicidad, en la figura no se muestran todas.

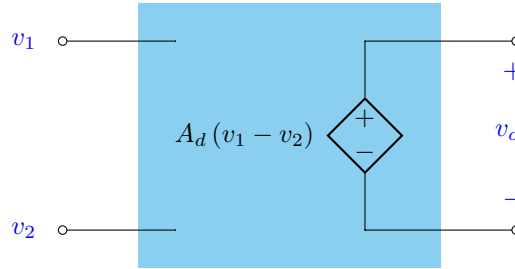


Figura C.1. Modelo fundamental del Amplificador Operacional.

En la figura C.2 se observa el símbolo para representar al amplificador operacional. La terminal ① es la *terminal de entrada inversora*, la ② corresponde a la *terminal de entrada no inversora* y la número ③ es la *terminal de la salida*.

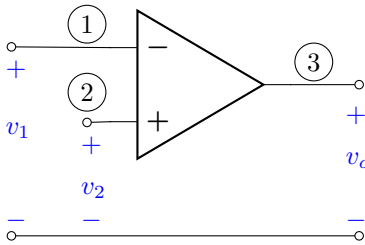


Figura C.2. Símbolo del amplificador operacional.

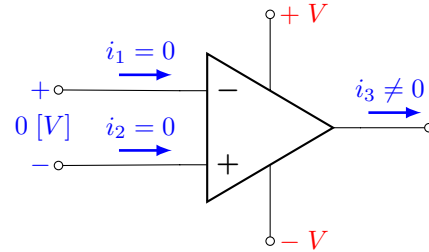


Figura C.3. Amplificador operacional ideal con sus terminales de alimentación.

El amplificador operacional tiene varias características importantes que lo hacen muy versátil en un número ingente de aplicaciones. No obstante, nuestro estudio se enfoca únicamente al modelo del *amplificador operacional ideal* y del cual sólo se tienen en cuenta tres características. A saber: la impedancia de entrada se puede considerar *infinita* mientras que la impedancia de salida *nula*, como se puede apreciar en la figura C.1. Si la ganancia A_d se considera *infinita*, entonces al llevar a cabo el análisis de un circuito eléctrico que contenga un amplificador operacional, en el par de terminales de entrada ambos voltajes son simultáneamente idénticos, como se visualiza en la figura C.3.

Para clarificar estas ideas, considere del circuito eléctrico de la figura C.4, del cual se desea encontrar la relación entre el voltaje de salida $V_o(s)$ y el voltaje de entrada $V_i(s)$, esto es, la función de transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

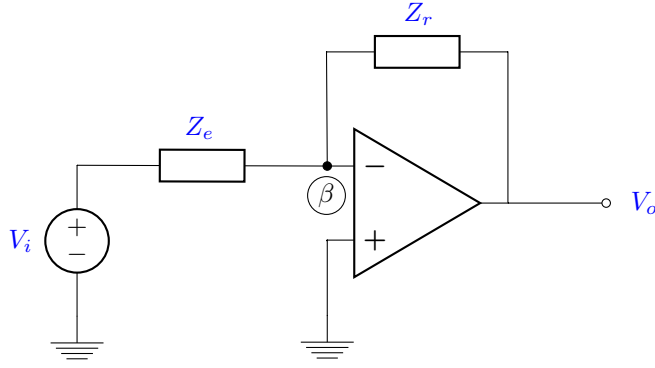


Figura C.4. Amplificador operacional con retroalimentación negativa.

A partir del análisis por nodos y después de que se ha transformado la fuente de voltaje V_i en una fuente de corriente, la ecuación de nodos resulta

$$\left(\frac{1}{Z_e} + \frac{1}{Z_r} + \frac{1}{\infty}\right)V_\beta(s) - \left(\frac{1}{Z_r}\right)V_o(s) = \frac{V_i(s)}{Z_r}$$

Pero dado que $V_\beta(s) = 0$, ¿por qué?, se tiene

$$-\left(\frac{1}{Z_r}\right)V_o(s) = \frac{V_i(s)}{Z_r}$$

así

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_r(s)}{Z_e(s)} \quad (C.1)$$

es la relación entre los voltajes de la salida y la entrada que se busca.

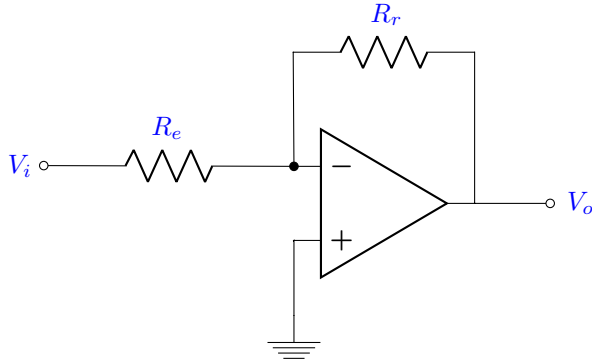


Figura C.5. Amplificador de voltaje inversor de ganancia finita.

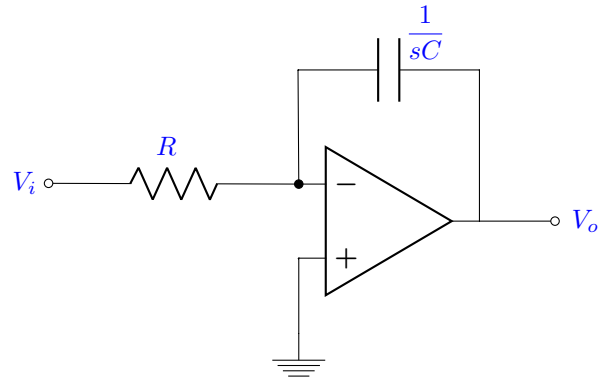


Figura C.6. Integrador.

Si las impedancias $Z_e(s)$ y $Z_r(s)$ se sustituyen por las resistencias R_e y R_r , respectivamente, como se muestra en la figura C.5; se tiene el *amplificador inversor de ganancia finita*. Su relación entrada-salida es

$$v_o(t) = -\frac{R_r}{R_e} v_i(t) \quad (C.2)$$

Asimismo, para el circuito eléctrico de la figura C.6, es asequible demostrar que la relación entrada-salida es

$$v_o(t) = -\frac{1}{CR} \int_0^t v_i(\tau) d\tau + v_o(0) \quad (C.3)$$

Los resultados anteriores se pueden generalizar, al considerar el teorema de superposición. De manera que la señal en la terminal de la salida del amplificador operacional de la figura C.7 es

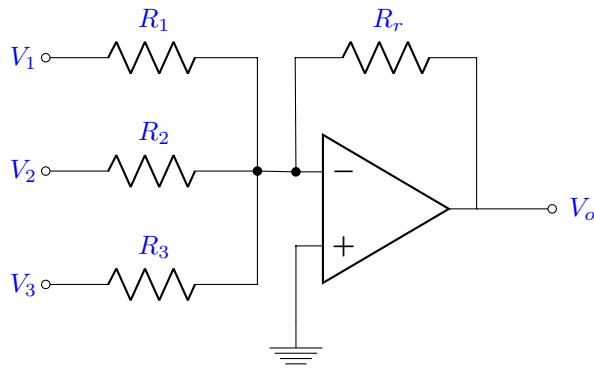


Figura C.7. Sumador.

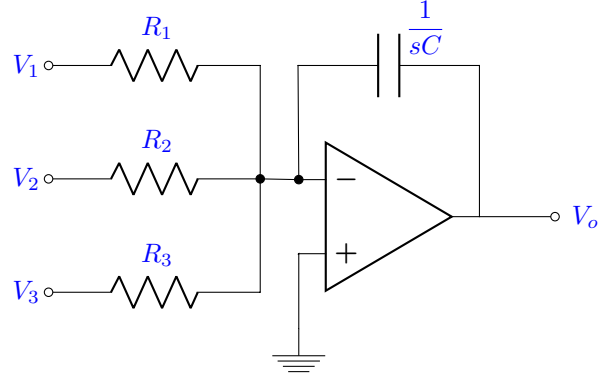


Figura C.8. Integrador.

$$v_o(t) = - \left[\frac{R_r}{R_1} v_1(t) + \frac{R_r}{R_2} v_2(t) + \frac{R_r}{R_3} v_3(t) \right]$$

y la correspondiente al amplificador operacional de la figura C.8, resulta

$$v_o(t) = - \left[\frac{1}{CR_1} \int_0^t v_1(\tau) d\tau + \frac{1}{CR_2} \int_0^t v_2(\tau) d\tau + \frac{1}{CR_3} \int_0^t v_3(\tau) d\tau \right] + v_o(0)$$

Finalmente, se encuentra la relación entrada-salida de los circuitos eléctricos de la figura C.9.

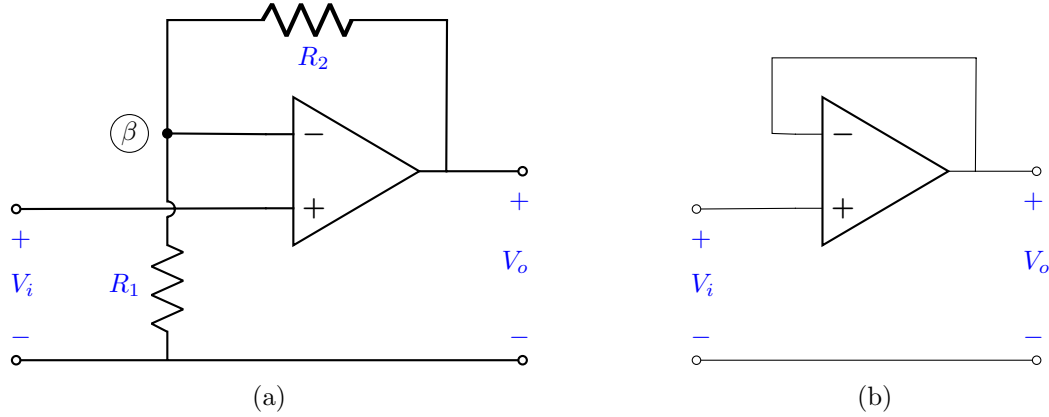


Figura C.9. (a) Amplificador de voltaje no inversor de ganancia finita. (b) Seguidor de voltaje.

En el circuito eléctrico de la figura C.9a, en primer lugar, se debe notar que

$$v_\beta(t) = v_i(t)$$

y que la ecuación de nodos para el nodo β es

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\infty} \right) v_\beta(t) - \left(\frac{1}{R_2} \right) v_o(t) = 0$$

con las dos ecuaciones anteriores y álgebra elemental, se tiene

$$v_o(t) = \frac{R_1 + R_2}{R_1} v_i(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_i(t) \quad (\text{C.4})$$

Este circuito eléctrico se denomina *amplificador de voltaje no inversor de ganancia finita*.

El circuito eléctrico de la figura C.9b es un caso particular del que se muestra en la figura C.9a; si se considera que $R_1 = \infty$ (*circuito abierto*) y $R_2 = 0$ (*corto circuito*). Por lo que la relación entrada-salida, a partir de la ecuación B.4, resulta ser

$$v_o(t) = v_i(t) \quad (\text{C.5})$$

este circuito eléctrico recibe el nombre de *seguidor de voltaje*. También se conoce como *amplificador de aislamiento* (buffer amplifier) pues separa o aísla a un circuito eléctrico de otro.

Bibliografía

- Desoer, C. A. and Kuh, E. S., *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill Company, 1969.
- Huelsman, L. P., and Allen P. E., *Introduction to the Theory and Design of Active Filters*, USA: McGraw-Hill, 1980.
- Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R., Scott, P. D., *Basic Electric Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1999.
- Dorf, R. C., Svoboda, J. A., *Circuitos Eléctricos*. México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.
- Hayt, W. H., Kemmerly, J. E., Durbin S. M., *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería*. México: McGraw-Hill, 2012.
- Franco, S. , *Design With Operational Amplifiers And Analog Integrated Circuits*, California: McGraw-Hill Education, 2015.