Ejercicio 1

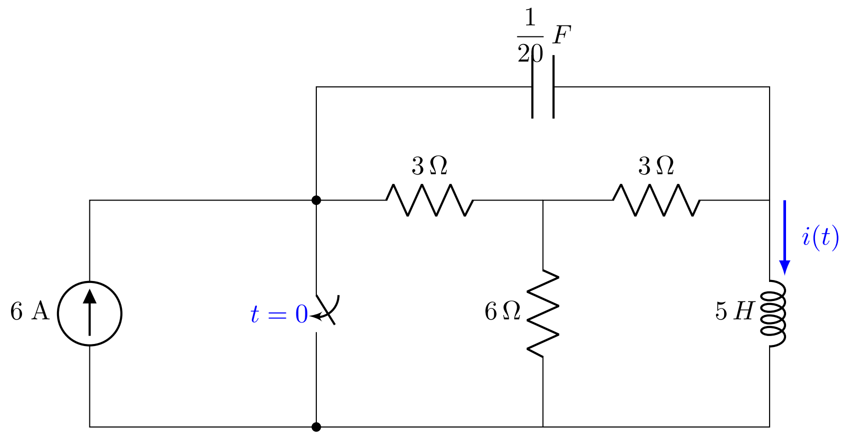
Víctor Manuel Sánchez Esquivel

8 de diciembre de 2022

1. Basic Electric Circuit Analysis

Ejercicio 9.11 de Basic Electric Circuit Analysis Fourth Edition de la página 217
D. E. Johnson, J. L. Hilburn, J. R. Johson
Prentice Hall

Calcule $i(t)$ para $t > 0$, si el circuito electrico se encuentra en estado permanente en $t = 0^-$.

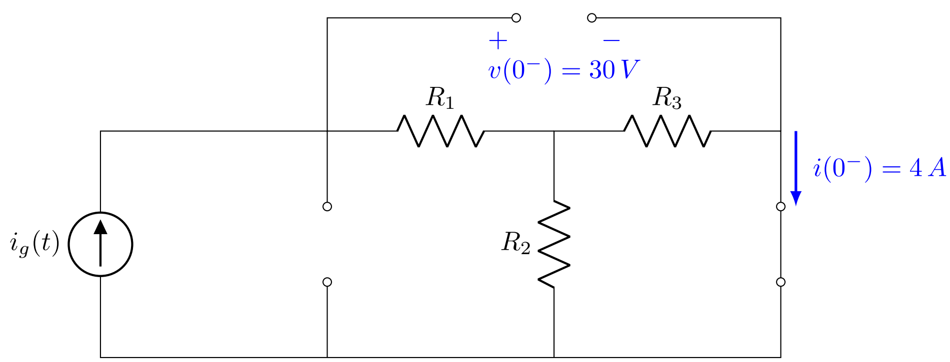


1.1. Solución

Para encontrar la corriente eléctrica en el inductor, es necesario modelizar el circuito eléctrico por medio de una ecuación diferencial lineal, ordinaria y de coeficientes constantes ya que el circuito eléctrico es lineal e invariante en el tiempo.

Para resolver la ecuación diferencial se requiere conocer la entrada y las condiciones iniciales. Éstas se determinan a continuación.

Como en el enunciado, se indica que el circuito eléctrico se encuentra en el estado permanente, el inductor se comporta como corto circuito y el capacitor como circuito abierto. Entonces, para $t = 0^-$, (antes de que se cierre el conmutador) el circuito eléctrico se encuentra en la situación que se muestra en la siguiente figura.



En virtud de que el capacitor se comporta como circuito abierto, la corriente eléctrica de la fuente independiente de corriente $i_g(t)$ circula completamente a través del resistor R_1, por lo que el voltaje en este resistor es de $v_{R_1} = R_1 \times i_g(t) = 18\,V$. Las resistencias R_2 y R_3 constituyen un divisor de corriente. Así, la corriente eléctrica que circula a través de R_3 es

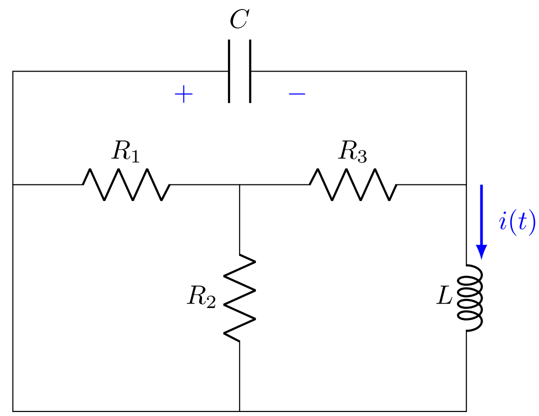
$$i_{R_3} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_g(t) = \frac{6}{6+3} 6 = 4\,A$$

El voltaje en el resistor R_3 es entonces $v_{R_3} = 3 \times 4 = 12\,V$.

Por consiguiente, el voltaje en el capacitor es $v_C(0^-) = v_{R_1} + v_{R_3} = 18 + 12 = 30\,V$ y la corriente en el inductor es $i_L(0^-) = 4\,A$

El circuito eléctrico tiene dos elementos que almacenan energía, por lo que la ecuación diferencial que le modeliza es de segundo orden. Por ende, para deslindar la corriente eléctrica a través del inductor, es necesario conocer también $\left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0^-}$. Su valor se determina a continuación

Para $t > 0$, el circuito eléctrico que se modeliza es el siguiente



Como se puede observar, los resistores R_1 y R_2 están conectados en paralelo y su equivalente en serie con el resistor R_3. El resistor equivalente R de estos tres resistores se encuentra conectado en paralelo con el capacitor C. Así que, de la ley de corrientes de Kirchhoff, se tiene

$$i_C + i_R = i_L$$

de la ley de voltajes de Kirchhoff

$$v_C = v_R = -v_L$$

por tanto

$$v_C = -L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \qquad \Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0^-} = -\frac{v_C(0^-)}{L} = -\frac{30}{5} = -6\,\frac{\mathrm{A}}{s}$$

En el mismo orden de ideas, la ecuación diferencial se obtiene seguidamente

$$\begin{aligned} C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + \frac{v_R}{R} &= i_L \\ C\frac{-\mathrm{d}v_L}{\mathrm{d}t} + \frac{-v_L}{R} &= i_L \\ CL\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L &= 0 \\ CL\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + i(t) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + 4i(t) &= 0 \end{aligned}$$

La transformada de Laplace de la ecuación diferencial es la siguiente

$$I(s) = \frac{si(0^-) + i'(0^-) + 4i(0^-)}{s^2 + 4s + 4} = \frac{4s + 10}{s^2 + 4s + 4}$$