

CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Un enfoque de análisis claro y conciso

Gloria Mata Hernández



DGAPA, UNAM
PAPIME 100920
Edición Digital
Facultad de Ingeniería

Presentación

La asignatura de Circuitos Eléctricos constituye el núcleo conceptual básico de la Ingeniería Eléctrica a partir de la cual se derivan las Ingenierías de Electrónica, de Telecomunicaciones y de Computación, de ahí su importancia en estas licenciaturas que se imparten en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, siendo esencial e indispensable como primera asignatura de las Ciencias de Ingeniería, ya que su conocimiento es la base de la tecnología moderna.

El curso curricular da continuidad al de Sistemas y Señales, ahora se abordan los Sistemas Eléctricos, Lineales, Invariantes en el tiempo, de Parámetros concentrados, Causales o no anticipativos. El material está orientado a estudiantes del 5° semestre de las asignaturas de Circuitos Eléctricos.

El Análisis de los Circuitos Eléctricos, se aborda bajo diferentes métodos de análisis:

- Estado de respuesta transitoria y permanente
- De corriente directa (CD) y corriente alterna (CA)
- En el dominio del tiempo y de la frecuencia
- De sistemas eléctricos monofásicos y trifásicos
- Métodos sistemáticos mediante LVK y LCK
- Enfoque de Teoremas de Redes Eléctricas
- Síntesis de los circuitos eléctricos

Para el proceso de aprendizaje de los estudiantes en estos temas se requiere de practicar y ejercitarse de forma sistemática y constante, el material que se utiliza contribuye a este proceso. Las matemáticas requeridas, aunque no son complicadas, si requieren de una clara comprensión y los métodos utilizados se pueden aplicar a circuitos más complejos y avanzados.

Bajo este enfoque se ha diseñado un libro en pdf estático con diversos recursos educativos, un material que aborda los aspectos fundamentales de la teoría, en el que se verifican los análisis y resultados con simulaciones en los diferentes dominios y los conocimientos adquiridos son utilizados en aplicaciones prácticas de manera que los estudiantes asimilan con mayor facilidad y efectividad.

Esta estrategia educativa, la autora la ha denominado el Triángulo del Aprendizaje Efectivo que conjunta de forma eficaz la teoría, la simulación y la aplicación práctica logrando un aprendizaje efectivo y sustancial en los estudiantes. Contempla un enfoque de análisis claro y conciso de manera que a los estudiantes se les facilite el aprender, comprender, asociar y asimilar los temas, aplicar e interpretar los circuitos y los resultados obtenidos del análisis. Se incluyen en anexos algunas demostraciones fundamentales y formularios que resumen cada capítulo y que pueden ser de gran utilidad para los estudiantes.

Se abordan los fundamentos de los temas de: Sistemas eléctricos, Análisis de circuitos eléctricos en estado sinusoidal permanente, Potencia y circuitos eléctricos trifásicos, Métodos generales de análisis de redes eléctricas, Teoremas de redes eléctricas y Redes de dos puertos o bipuertos.

Es de gran interés para la autora fortalecer el conocimiento en los estudiantes a través de una estrategia visual, no exclusiva, ya que la ingeniería se basa en dibujos de diversa índole como diagramas eléctricos, de bloques, de flujo, siendo que el aspecto gráfico se aprovecha como elemento fundamental para visualizar, comprender el todo, interpretar y con ello poder concluir acerca de los resultados.

Este recurso educativo es parte de los productos del proyecto PAPIME PE100920 titulado “Desarrollo del Libro Electrónico interactivo para la disciplina de Circuitos Eléctricos” en el que se busca que los estudiantes dispongan de un material accesible, atractivo y juvenil.

El material que se presenta surge a partir de la idea inicial de conjuntar toda una serie de materiales, diapositivas, notas, apuntes de clase, y otros recursos educativos emanados de la experiencia docente de muchos años, que pueda ser de utilidad para los estudiantes que cursan la asignatura.

Este material se ha desarrollado totalmente con el editor Latex con gran profesionalismo y compromiso por Fernando Rivera Pérez, dándole la oportunidad de presentarlo como Material Didáctico para su titulación.

En el contexto del proyecto PAPIME, se incluye también Material Visual de Divulgación Complementario del Libro de Circuitos Eléctricos que se presenta en formato de libro, está integrado con tres Partes: Compendio de Exposición Carteles, Recursos Interactivos Educativos y Compendio de Portadas, alusivos todos a Circuitos Eléctricos.

Por otro lado, cabe mencionar que, aún cuando hemos revisado exhaustivamente el material que se presenta, sabemos que podríamos no quedar exentos de alguna omisión, misma que agradeceríamos al lector nos la hiciera saber.

Finalmente, agradecemos a la DGAPA, el apoyo otorgado al proyecto PAPIME PE100920 para la realización de este material.

M.I. Gloria Mata Hernández
Responsable del proyecto

Prefacio

Circuitos Eléctricos

Un enfoque de análisis claro y conciso

Esta obra es un libro de texto que está disponible en formato electrónico interactivo y en pdf estático. Está destinado a los estudiantes que cursan la asignatura de Circuitos Eléctricos en las licenciaturas de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Computación y Telecomunicaciones. Se pretende facilitar a los estudiantes la comprensión de los temas del análisis y síntesis de circuitos, tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia, orientados a la asimilación de la teoría y a su uso en aplicaciones útiles para el estudiante, facilitándole la comprensión y asociación de la teoría con el mundo real.

El contenido versa específicamente sobre los programas de las asignaturas de Circuitos Eléctricos que se imparten entre el 5° y 6° semestres de las ingenierías mencionadas e incluye en cada tema una presentación general, definiciones, el sustento teórico, los métodos de análisis, diseño, ejemplos.

Contempla un enfoque de análisis claro y conciso de manera que a los estudiantes se les facilite el aprender, comprender, asociar y asimilar los temas, aplicar e interpretar los circuitos y los resultados obtenidos del análisis. Se abordan los fundamentos de los temas de: Sistemas eléctricos, Análisis de circuitos eléctricos en estado sinusoidal permanente, Potencia y circuitos eléctricos trifásicos, Métodos generales de análisis de redes eléctricas, Teoremas de redes eléctricas y Redes de dos puertos o bipuertos.

Es de gran interés para la autora fortalecer el conocimiento en los estudiantes a través de una estrategia visual, no exclusiva, ya que la ingeniería se basa en dibujos de diversa índole como diagramas eléctricos, de bloques, de flujo, siendo que el aspecto gráfico se aprovecha como elemento fundamental para visualizar, comprender el todo, interpretar y con ello poder concluir acerca de los resultados.

Es en este sentido que el libro electrónico incorpora en cada tema elementos interactivos que le permiten al estudiante visualizar secuencias de aspectos específicos en los que se desea hacer énfasis para que pueda retenerlos más fácilmente.

El material se ha desarrollado en formato estático en pdf para su uso en cualquier otro dispositivo y también en formato iBook para visualizarse en una tableta iPad en la que se emplean y aprovechan estas características interactivas.

ÍNDICE GENERAL

1	Sistemas Eléctricos	8
1.1	Introducción	8
1.2	Clasificación de redes eléctricas	9
1.3	Variables eléctricas	12
1.4	Elementos de dos terminales	14
1.4.1	Elemento Resistivo LIT	14
1.4.2	Elemento Inductivo LIT	16
1.4.3	Elemento Capacitivo LIT	17
1.4.4	Fuentes de energía independientes ideales	18
1.4.5	Fuentes de energía independientes reales	18
1.4.6	Fuentes de Energía Dependientes	19
1.4.7	Ley de voltajes de Kirchhoff	20
1.4.8	Ley de corrientes de Kirchhoff	22
1.4.9	Divisor de voltaje	22
1.4.10	Divisor de corriente	23
1.5	Transformación de fuentes	24
1.5.1	Transformación de fuentes	24
1.6	Transformación Estrella a Delta y Delta a Estrella	26
1.6.1	Conversión Δ a estrella	26
1.6.2	Conversión estrella a Δ	26
1.7	Circuitos de primer orden	29
1.7.1	Circuito RC sin excitación	29
1.7.2	Circuito RC con excitación	30
1.7.3	Circuito RL sin excitación	30
1.7.4	Circuito RL con excitación	31
1.8	Circuitos de segundo orden	36
1.8.1	Circuito RLC en serie sin fuente	36
1.8.2	Circuito RLC en paralelo sin fuente	40
1.8.3	Circuito RLC en serie con fuente	41
1.8.4	Circuito RLC paralelo con fuente	41

1.9	La Transformada de Laplace	43
1.9.1	Inductor en el dominio “s”	44
1.9.2	Capacitor en el dominio “s”	45
1.9.3	Resistencia y fuentes en el dominio “s”	45
1.9.4	Impedancia y Admitancia	46
1.10	La Función de Transferencia	47

CAPÍTULO 1

SISTEMAS ELÉCTRICOS

1.1 Introducción

En este primer capítulo se aborda una introducción a los circuitos eléctricos. Se inicia presentando la clasificación de circuitos desde tres puntos de vista, las tres relacionadas, no obstante, permite tener un panorama más claro del contexto tanto de los componentes y circuitos que se utilizan, así como los métodos y técnicas que se emplearán para su análisis. Se presentan las principales variables eléctricas y cómo están relacionadas. Se describen los 3 componentes básicos de un circuito como elementos de dos terminales modelados matemáticamente mediante las variables de voltaje y de corriente, incluyendo la Ley de Ohm. También se presenta la descripción de elementos activos como son las fuentes de voltaje, de corriente tanto independientes como dependientes.

Posterior a la descripción de los componentes se presentan dos leyes fundamentales para el análisis de circuitos: las Leyes de Kirchhoff, las cuales establecen restricciones en las relaciones entre los voltajes y las corrientes en cada uno de los elementos del circuito.

A partir de estos componentes y las leyes de Kirchhoff se pueden construir modelos de circuitos prácticos, como el divisor de voltaje y el divisor de corriente, mismos que establecen técnicas simples de reducción para el análisis de circuitos.

Con estas primeras técnicas de análisis es posible realizar transformaciones con fuentes de voltaje y de corriente, así como de circuitos de tres terminales. Hasta este punto se ha abordado un análisis de corriente directa CD, siendo las respuestas en todos los casos también de corriente directa o de valores constantes.

Con el conocimiento adquirido es posible plantear el modelo de circuitos de primero y segundo orden, RL, RC y RLC con y sin excitación, para obtener el comportamiento de la respuesta transitoria y la permanente tanto en el dominio del tiempo como en términos de la variable 's', esto es utilizando la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace permite analizar circuitos de una forma algebraica más sencilla que el que se realiza en el dominio del tiempo.

Así mismo, se obtiene la función de transferencia con la cual es posible determinar la respuesta de un circuito a una amplia variedad de señales de entrada. Este análisis se aborda con redes serie paralelo llamadas redes en escalera muy utilizadas en filtros pasivos.

1.2 Clasificación de redes eléctricas

Para que un circuito eléctrico realice la tarea con éxito que se le ha asignado, es necesario apoyarse en tres conceptos fundamentales que se mencionan enseguida. La aplicación adecuada de estos conceptos permite la elaboración de circuitos y sistemas complejos que agilizan y facilitan las actividades del ser humano.

Diseño: Establecer el modelo del circuito que cumpla con características para el comportamiento deseado en el dominio del tiempo o la frecuencia.

Análisis: Dada la excitación y el modelo de circuito se determina el comportamiento o respuesta del circuito (generalmente es único).

Síntesis: Dada la excitación aplicada y la respuesta que se desea obtener, se determina el circuito que permite lograrla (hay muchas soluciones).

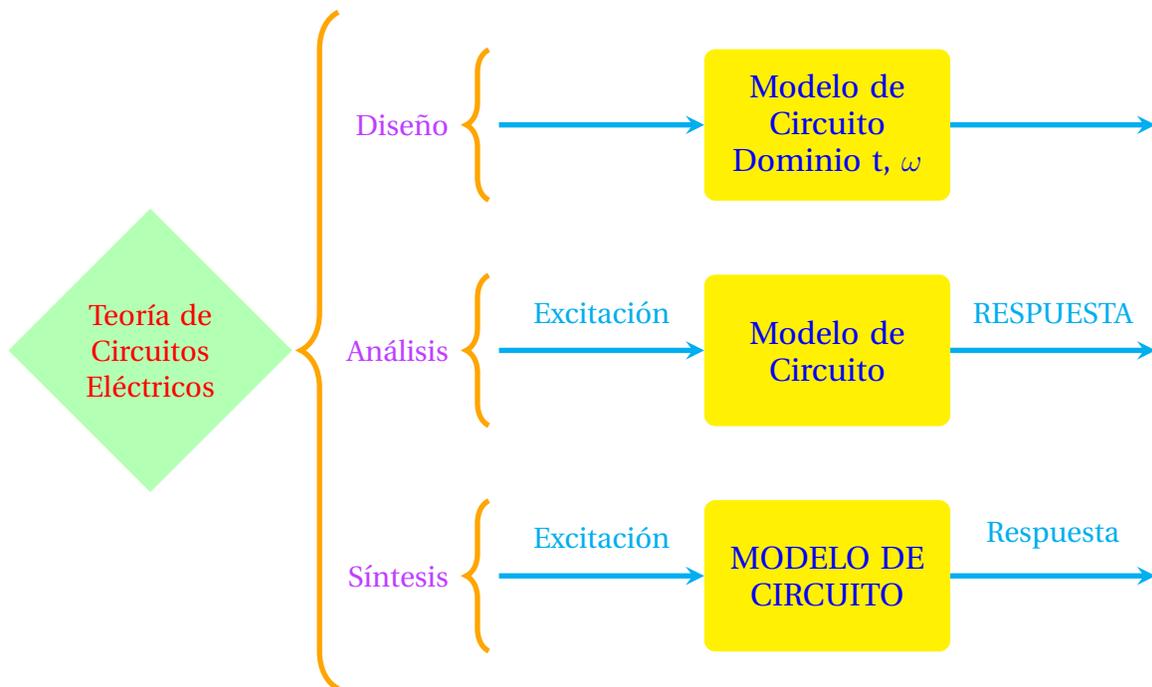


Figura 1.1: Representación desde el punto de vista del diseño, análisis y síntesis para un circuito eléctrico.

Se describen los criterios más comúnmente utilizados desde el punto de vista del análisis de sistemas a un circuito eléctrico como caso particular de un sistema general.

Lineal: Un circuito lineal es aquel que cumple con el principio de superposición.

Parámetros concentrados: Las variables y/o componentes que conforman el circuito o sistema no dependen de un sistema de coordenadas espaciales, es decir el tamaño y la geometría de los mismos no se toman en cuenta. Los sistemas de parámetros concentrados pueden ser modelados con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Dichos circuitos son considerados y analizados en este texto.

Invariante en el tiempo: La operación del circuito no se ve afectada por los desplazamientos temporales que tenga su señal de entrada, el circuito responderá de tal forma que se mantenga el principio de linealidad dando como salida una señal con los mismos desplazamientos en tiempo que su señal de entrada. Es estático en cuanto a variaciones temporales.

Finita: Las ecuaciones diferenciales que resultan del modelado de un circuito eléctrico son de orden finito, por lo que son aplicables las técnicas tradicionales de resolución en (EDO).

Reciprocidad: Los circuitos recíprocos permiten intercambiar entradas por salidas.

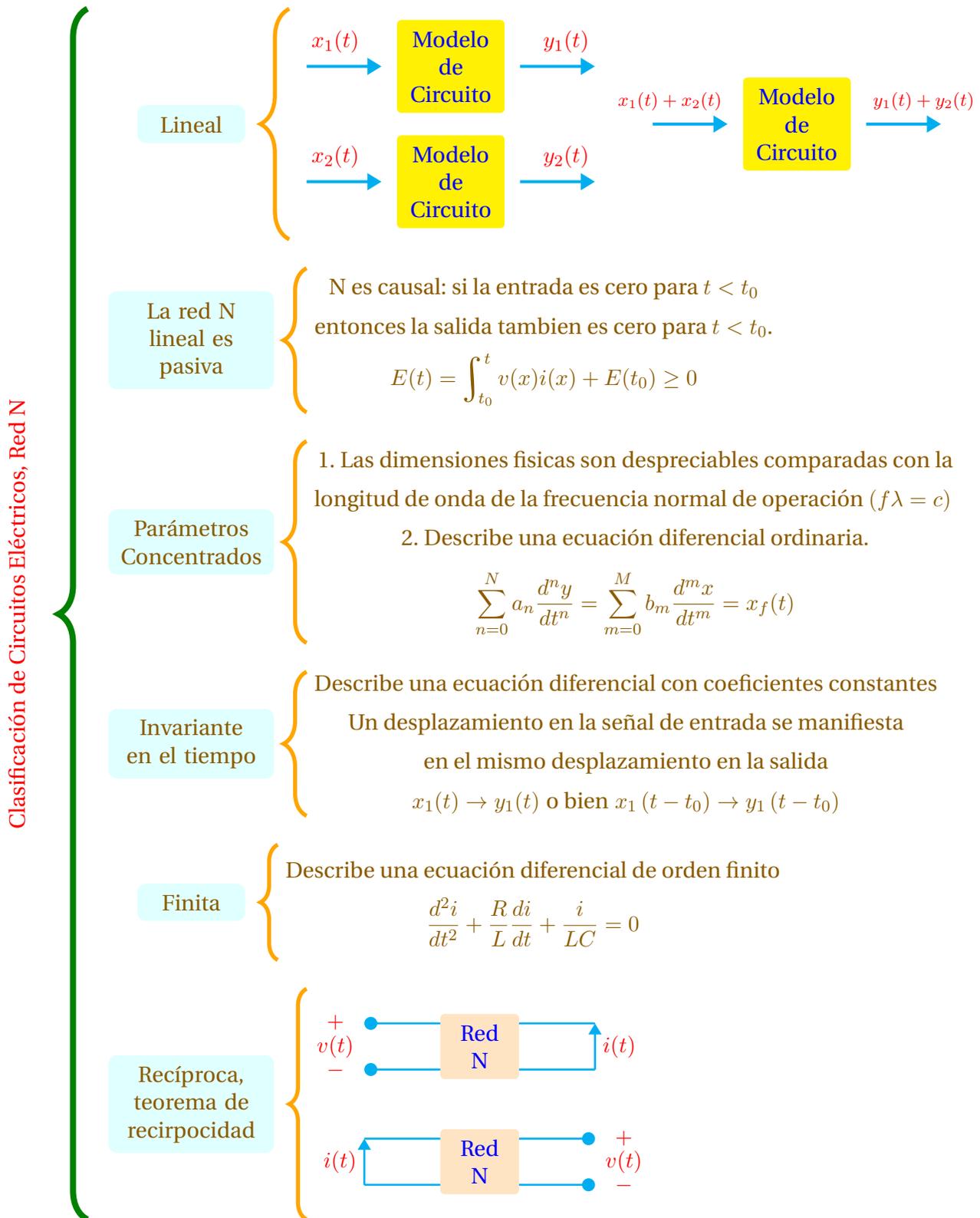


Figura 1.2: Clasificación desde el punto de vista de un sistema general.

1.3 Variables eléctricas

Variable	Unidad	Abreviatura	Símbolo	Relación
Carga	Coulomb	C	$q(t)$	$q(t) = \int i(t) dt$
Corriente Eléctrica	Ampere	A	$i(t)$	$i(t) = \frac{dq}{dt}$
Energía	Joule	J	$w(t)$	$w(t) = \int p(t) dt$
Voltaje (diferencia de potencial)	Volt	V	$v(t)$	$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dw}{dq}$
Potencia	Watt	W	$p(t)$	$p(t) = v(t)i(t) = \frac{dw}{dt}$
Fllujo Magnético	Weber vuelta	Wb-vuelta	$\Phi(t)$	$\Phi(t) = \int v(t) dt$

Tabla 1.1: Relación entra variables eléctricas básicas.

Se describe de manera general la actuación de los elementos que conforman un circuito eléctrico:

Elementos Pasivos: En esta clasificación encontramos a los tres principales anfitriones que aparecen en todo circuito eléctrico, que son el resistor, inductor y capacitor.

- Resistor: Al circular una corriente eléctrica por este elemento, ocasiona un calentamiento en el mismo por efecto Joule, esta energía es absorbida por el medio por lo que no se puede recuperar y de allí que se le coloque en la categoría de irreversible en cuanto a transferencia energética.
- Inductor: Un elemento de comportamiento dinámico que almacena e intercambia energía dentro del circuito en el que opera haciendo uso de su campo magnético, la actuación de este elemento es bidireccional por lo que se le considera reversible en cuanto a transferencia energética.
- Capacitor: Un elemento con características similares que el inductor pero efectos contrarios, almacena energía en su campo eléctrico para intercambiarla dentro del circuito.

Elementos Activos: Aquí encontramos a los elementos que proporcionan la energía necesaria para la adecuada operación del circuito. Se estudian las fuentes de voltaje y de corriente ideales y reales presentes en cualquier circuito eléctrico así como las fuentes de voltaje y corriente dependientes que son muy comunes en circuitos electrónicos.

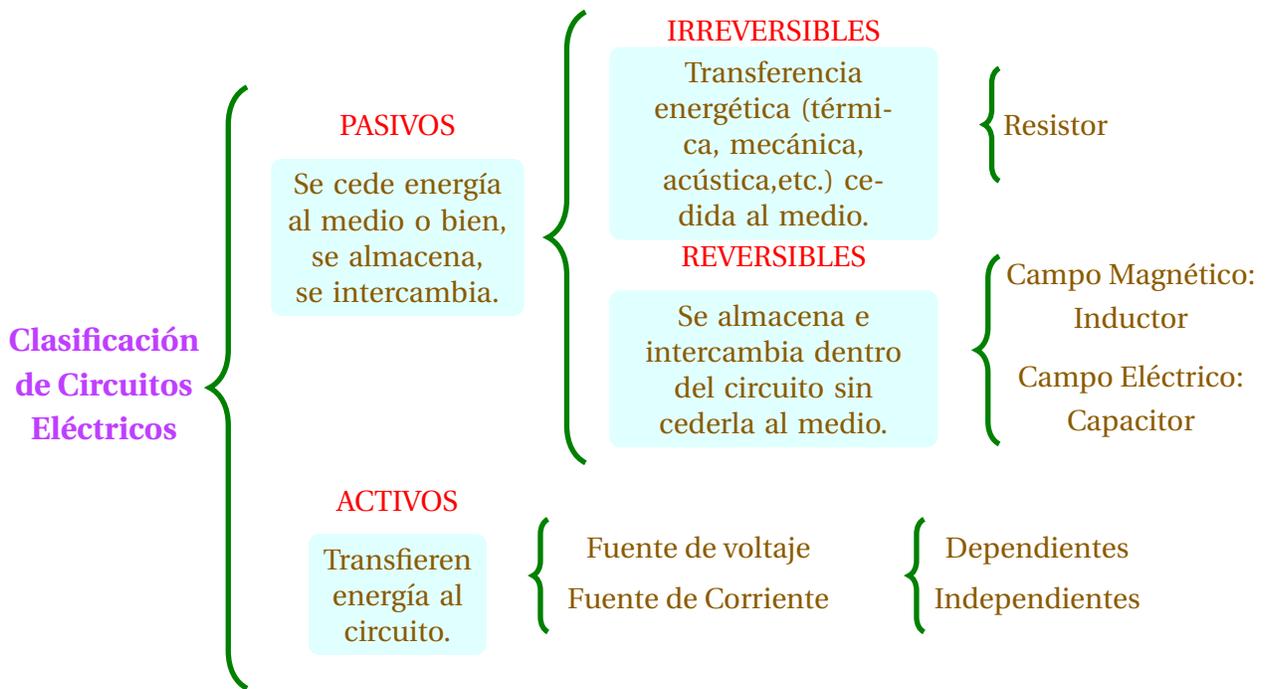


Figura 1.3: Una clasificación desde el punto de vista de los elementos que constituyen una red eléctrica.

1.4 Elementos de dos terminales

1.4.1 Elemento Resistivo LIT

Resistor (Disipación de Energía): Es la propiedad física de un elemento o dispositivo de impedir el flujo de corriente, se representa con la letra R.

- Resistencia R [Ω]
- Conductancia $G = \frac{1}{R}$ [Siemens]

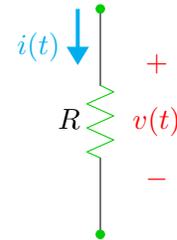


Figura 1.4: Símbolo del Resistor

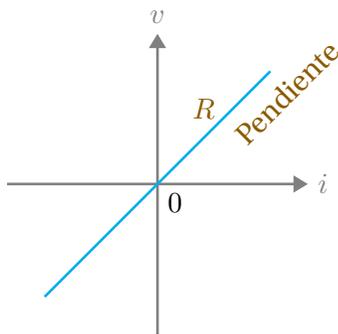


Figura 1.5: R es constante

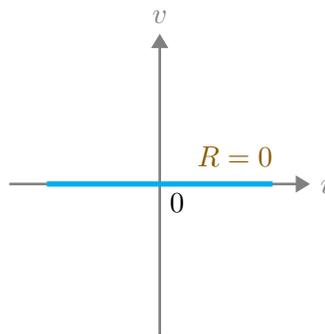


Figura 1.6: Corto Circuito

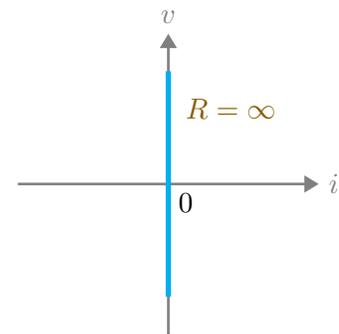


Figura 1.7: Circuito Abierto

Directa	Inversa	Energía
Ley de Ohm $v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t) = Gv(t)$	$E(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau)i(\tau) d\tau$ $E(t) = \int_{-\infty}^t Ri^2(\tau) d\tau$

Tabla 1.2: Relaciones básicas del elemento resistivo.

Existe también otro tipo de elementos resistivos que como parte de su funcionamiento presentan un comportamiento no lineal. Estos elementos se describen brevemente a continuación y sus relaciones de corriente y voltaje se resumen en la Tabla 1.3.

Potenciómetro (Resistor LVT): Es un elemento eléctrico resistivo variable (generalmente de tres terminales) que se ajusta manualmente al hacer girar la perilla hacia la derecha o izquierda, se comporta como un divisor de voltaje. Suele utilizarse en circuitos de corrientes pequeñas.



Figura 1.8: Potenciómetro

Diodo (Resistor NLIT): Es un componente electrónico de dos terminales de tipo semiconductor, el cual permite la circulación de corriente eléctrica a través del mismo en una sola dirección y lo impide en el sentido contrario. Esta característica permite que el elemento presente dos estados (Polarización directa) en dirección de la corriente y (Polarización Inversa) en contra de la corriente.



Figura 1.9: Diodos LED

Diodo Shockley (Resistor NLVT): Es un dispositivo de dos terminales que presenta dos estados posibles, uno de bloqueo o de alta impedancia, y otra de conducción o de baja impedancia. Se utiliza principalmente en osciladores.

Elemento	Ejemplo	Directa	Inversa
Resistor LVT	$R(t) = R_1 \cos(\omega t)$	$v(t) = R(t)i(t)$	$i(t) = G(t)v(t)$
Resistor NLIT	Diodo	$v(t) = f(i(t))$	$i(t) = I_s \left(e^{qv(t)/KT} - 1 \right)$
Resistor NLVT	Diodo Shockley	$v(t) = f(i(t), t)$	$i(t) = f(v(t), t)$

Tabla 1.3: Tabla de elementos resistivos no lineales.

1.4.2 Elemento Inductivo LIT

Inductor (Almacenamiento de Energía Eléctrica): Es un dispositivo o elemento del circuito capaz de almacenar energía eléctrica en su campo magnético y cederla posteriormente al circuito. Impide los cambios instantáneos de corriente.

- Inductancia L [Henry]
- Inductancia Inversa Γ (Gamma)

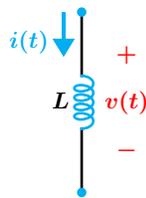


Figura 1.10: Símbolo del Inductor

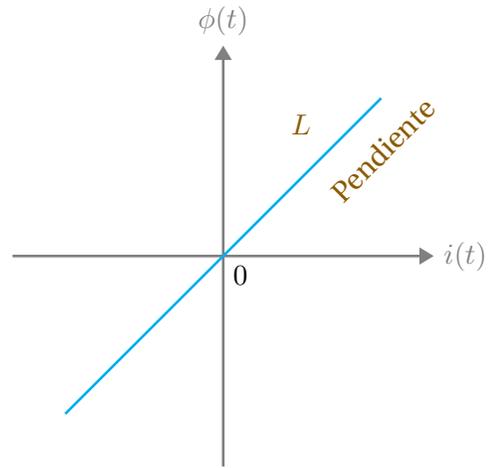


Figura 1.11: Relación $\phi(t) = Li(t)$

Directa	Inversa	Energía
$v(t) = L \frac{di}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + i(0)$	$E(t) = \int_{-\infty}^t L \frac{di}{d\tau} i(\tau) d\tau$ $E(t) = \int_{-\infty}^{i(t)} Li(\tau) di = \frac{Li^2(t)}{2}$

Tabla 1.4: Relaciones básicas del elemento inductivo LIT.

Se presenta a continuación una tabla que describe brevemente la relación voltaje-corriente para un inductor LVT.

Ley de Faraday	Característica	Voltaje-Corriente
$v(t) = L \frac{d\phi}{dt}$	$\phi(t) = L(t)i(t)$	$v(t) = L(t) \frac{di}{dt} + i(t) \frac{dL}{dt}$

Tabla 1.5: Relaciones de un inductor LVT.

1.4.3 Elemento Capacitivo LIT

Capacitor (Almacenamiento de Energía Eléctrica): El capacitor es un dispositivo o el elemento del circuito capaz de almacenar energía eléctrica mediante su campo eléctrico. Impide las variaciones instantáneas de voltaje.

- Capacitancia C [Farad]
- Elastancia $\frac{1}{C} = S$ (S)

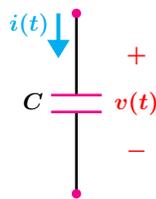


Figura 1.12: Símbolo del Capacitor

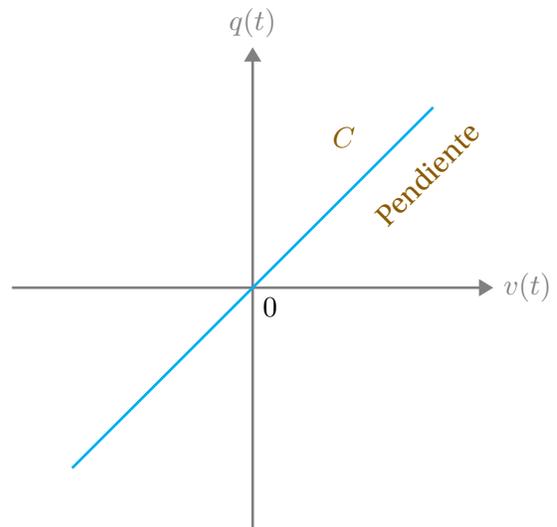


Figura 1.13: Relación $q(t) = Cv(t)$

Directa	Inversa	Energía
$i(t) = C \frac{dv}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v(0)$	$E(t) = \int_{-\infty}^t C \frac{dv}{d\tau} v(\tau) d\tau$ $E(t) = \int_{-\infty}^{v(t)} C v(\tau) dv = \frac{Cv^2(t)}{2}$

Tabla 1.6: Relaciones básicas del elemento Capacitivo LIT.

En la Tabla 1.7 se presenta una relación para las variables de voltaje, corriente y carga en un capacitor LVT.

Relación Corriente-Carga	Característica	Voltaje-Corriente
$i(t) = \frac{dq}{dt}$	$q(t) = C(t)v(t)$	$i(t) = C(t) \frac{dv}{dt} + v(t) \frac{dC}{dt}$

Tabla 1.7: Relaciones de un Capacitor LVT.

1.4.4 Fuentes de energía independientes ideales

Fuente de voltaje ideal: Es un elemento eléctrico capaz de mantener un voltaje constante en sus terminales, independientemente de la carga a la cual esta conectado y de la corriente que circule por dicho elemento.

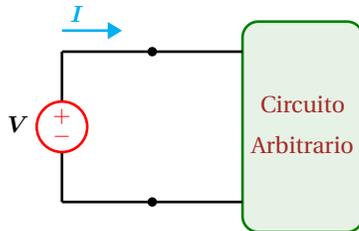


Figura 1.14: Fuente de voltaje Independiente

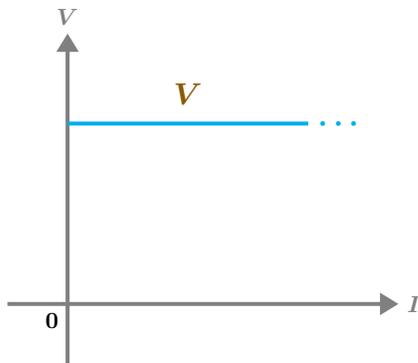


Figura 1.15: Relación voltaje-corriente. El voltaje es constante.

Fuente de corriente ideal: Es un elemento eléctrico capaz de mantener una corriente constante en su rama, independientemente de la carga a la cual esta conectado y del voltaje presente en sus terminales.

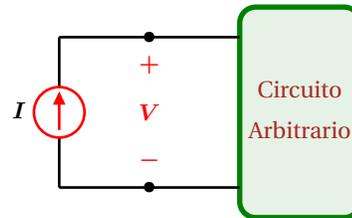


Figura 1.16: Fuente de corriente Independiente

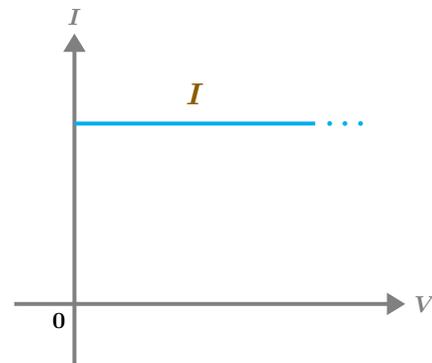


Figura 1.17: Relación corriente-voltaje. La corriente es constante.

1.4.5 Fuentes de energía independientes reales

Fuente de voltaje real: El valor del voltaje que aparece en la terminales de este elemento, depende de la carga a la cual esta conectada y de la corriente que circula por el mismo.

Se representa con una fuente de voltaje ideal en serie con una resistencia R_s de valor mucho menor que la resistencia de carga ($R_s \ll R_c$), para que se mantenga el voltaje de la fuente.

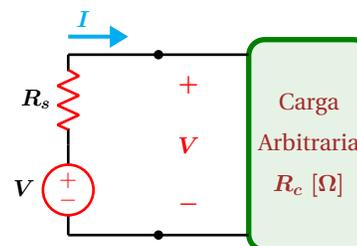


Figura 1.18: Fuente de voltaje Independiente Real

Fuente de corriente real: El valor de la corriente que es capaz de suministrar este elemento, depende del voltaje en sus terminales y de la carga a la cual esta conectado. Se representa con una fuente de corriente ideal en paralelo con una resistencia R_s de valor mucho mayor a la resistencia de carga ($R_s \gg R_c$).

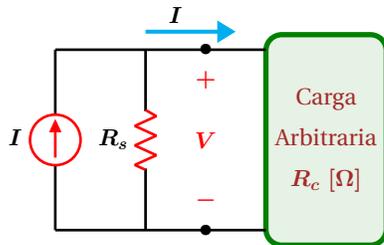


Figura 1.19: Fuente de corriente Independiente Real

1.4.6 Fuentes de Energía Dependientes

Hasta ahora se han mencionado dos tipos de fuentes ideales en las que el valor de la fuente no se ve afectada de ningún modo por lo que suceda en el resto del circuito.

A continuación se examinan las llamadas fuentes dependientes o controladas, en las que el valor de la fuente se ve modificada por una corriente o voltaje presente en alguna otra parte del circuito.

Fuente de voltaje controlada por voltaje: El parámetro K es un factor de ajuste, no tiene unidades, v_x es el voltaje de dependencia ubicado en alguna otra parte del circuito. El voltaje V entre las terminales de la fuente dependiente esta dado por $V = Kv_x$. En la Figura 1.20 se representa el símbolo asociado a dicho elemento.

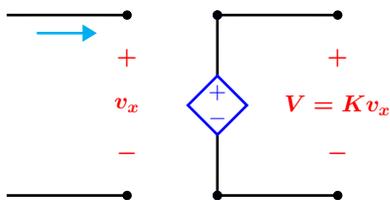


Figura 1.20: Fuente de Voltaje controlada por voltaje.

Fuente de corriente controlada por corriente: El

parámetro K es un factor de ajuste que no tiene unidades, i_x es la corriente de dependencia ubicada en alguna otra parte del circuito. La corriente I que circula por la fuente dependiente esta dado por $I = Ki_x$. En la Figura 1.21 se muestra el símbolo asociado al elemento.

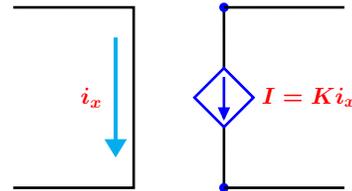


Figura 1.21: Fuente de corriente controlada por corriente.

Fuente de voltaje controlada por corriente: El parámetro r es un factor de ajuste con unidades de V/A , i_x es la corriente de dependencia ubicada en alguna otra parte del circuito. El voltaje V entre las terminales de la fuente dependiente esta dado por $V = ri_x$. En la Figura 1.22 se muestra la representación del dispositivo.

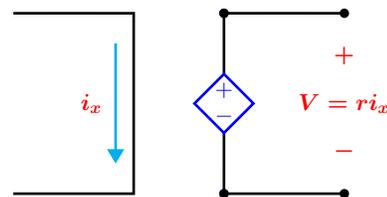


Figura 1.22: Fuente de Voltaje controlada por corriente.

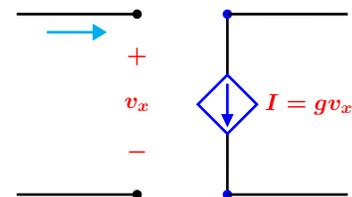


Figura 1.23: Fuente de corriente controlada por voltaje.

Fuente de corriente controlada por voltaje: El parámetro g es un factor de ajuste con unidades de A/V , v_x es el voltaje de dependencia ubicado en alguna otra parte del circuito. La corriente I

que circula por la fuente dependiente esta dado por la expresión $I = gv_x$. En la Figura 1.23 se muestra la representación del elemento.

Este tipo de fuentes aparecen en modelos eléctricos equivalentes de varios dispositivos electrónicos, como los transistores, amplificadores operacionales u otros dispositivos en los que se dispone de las terminales de entrada y salida, etc. También se utilizan para aplicaciones en redes multipuerto que serán analizados posteriormente. En las Figuras 1.24 y 1.25 se muestran dos aplicaciones en las que se utilizan las fuentes dependientes.

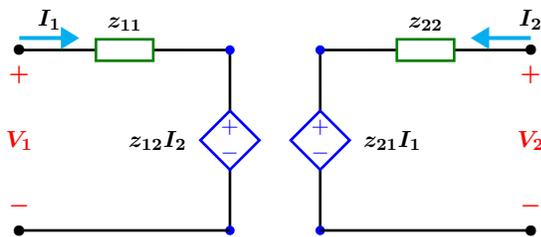


Figura 1.24: Red de dos puertos o Bipuerto.

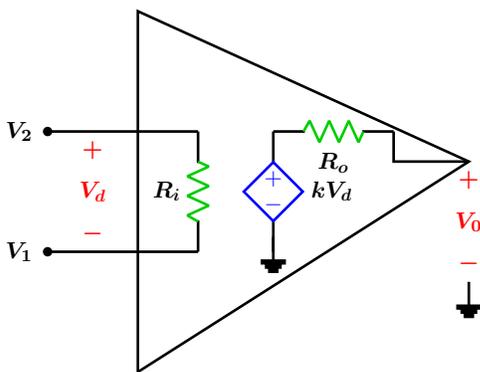


Figura 1.25: Modelo simple de un Amplificador operacional.

1.4.7 Ley de voltajes de Kirchhoff

La comprensión de las leyes de Kirchhoff constituyen la piedra angular del análisis de circuitos,

se basan a su vez en las leyes físicas de la conservación de la energía y de la carga eléctrica. Se describen brevemente a continuación.

Para cualquier circuito de parámetros concentrados, en cualquier trayectoria cerrada y en cualquier tiempo, la suma de voltajes es igual a cero. Matemáticamente se expresa como:

$$\sum V_o = 0$$

De manera alternativa, esta ley se puede enunciar como sigue:

Para cualquier trayectoria cerrada, la suma de las elevaciones en el potencial debe ser igual a la suma de las caídas en el potencial. Matemáticamente esto se expresa como:

$$\sum V_e = \sum V_c$$

En la Figura 1.26 se muestra dos trayectorias que ilustran la aplicación de la LVK.

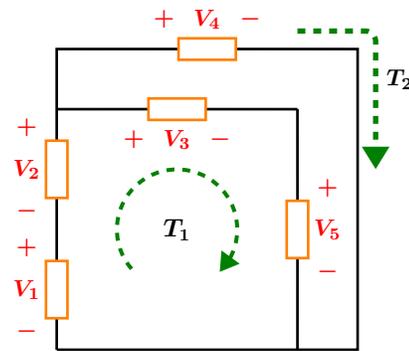


Figura 1.26: Ley de voltajes Kirchhoff

Siguiendo la trayectoria T_1 se tiene:

$$V_1 + V_2 - V_3 - V_5 = 0$$

Siguiendo la trayectoria T_2 se tiene:

$$V_1 + V_2 - V_4 = 0$$

Ejemplo 1.4.1

Para el circuito mostrado en la Figura 1.27, y considerando los voltajes de nodo siguientes:

$$v_{1o} = 2 \text{ [V]} \quad v_{2o} = 4 \text{ [V]} \quad v_{3o} = 7 \text{ [V]}$$

$$v_{4o} = 11 \text{ [V]} \quad v_{5o} = 16 \text{ [V]} \quad v_{6o} = 22 \text{ [V]}$$

$$v_{7o} = 29 \text{ [V]}$$

Obtener:

$$v_x \quad v_{21} \quad v_{12} \quad v_{53} \quad v_{16} \quad v_{67} \quad v_{14}$$

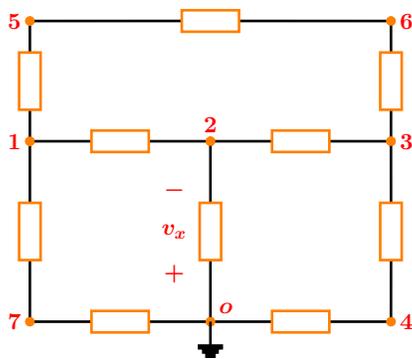


Figura 1.27: Aplicación de la LVK

Solución

El voltaje v_x es el negativo de v_{2o} por lo que:

$$v_x = -v_{2o} = -4 \text{ [V]}$$

Cálculo del voltaje v_{12} :

$$v_{12} + v_{2o} = v_{1o}$$

$$v_{12} + 4 = 2$$

$$v_{12} = -2 \text{ [V]}$$

El voltaje v_{21} es el negativo del voltaje v_{12} :

$$v_{21} = 2 \text{ [V]}$$

Cálculo del voltaje v_{53} :

$$v_{53} + v_{3o} = v_{5o}$$

$$v_{53} + 7 = 16$$

$$v_{53} = 9 \text{ [V]}$$

Cálculo del voltaje V_{16} :

$$v_{6o} + v_{o1} + v_{16} = 0$$

$$22 - 2 + v_{16} = 0$$

$$v_{16} = -20 \text{ [V]}$$

Cálculo del voltaje v_{67} :

$$v_{67} = v_{6o} + v_{o7}$$

$$v_{67} = 22 - 29$$

$$v_{67} = -7 \text{ [V]}$$

Cálculo del voltaje v_{14} :

$$v_{14} + v_{4o} + v_{o1} = 0$$

$$v_{14} + 11 - 2 = 0$$

$$v_{14} = -9 \text{ [V]}$$

1.4.8 Ley de corrientes de Kirchhoff

Para todo circuito de parámetros concentrados, en cualquier instante de tiempo, la suma algebraica de corrientes presente en una superficie cerrada es cero.

$$\sum I_n = 0$$

De manera alterna se puede enunciar como sigue:

Para todo nodo y en cualquier instante de tiempo, la suma de las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma de corrientes que salen del mismo. Matemáticamente se expresa como:

$$\sum I_e = \sum I_s$$

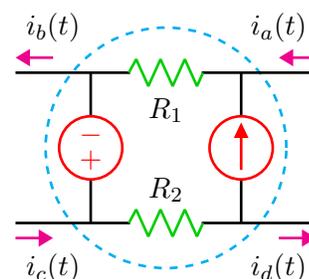


Figura 1.28: Ley de corrientes de Kirchhoff

Ilustración de la LCK

$$i_a(t) + i_c(t) = i_b(t) + i_d(t)$$

Ejemplo 1.4.2

Para el circuito mostrado en la Figura 1.29, obtenga el valor de i_x , interprete el resultado.

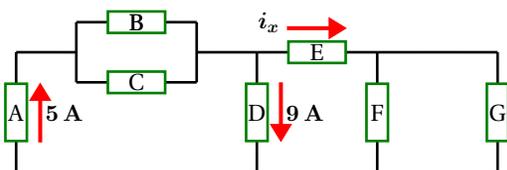


Figura 1.29: Aplicación de la LCK

Solución

$$i_x + 9 = 5$$

$$i_x = -4 \text{ A}$$

En realidad la corriente i_x tiene dirección contraria a como esta especificada en el diagrama.

1.4.9 Divisor de voltaje

El divisor de voltaje es una técnica que permite obtener de manera directa el voltaje en una resistencia sin conocer previamente la corriente que circula por el circuito.

Si se tiene una configuración de varias resistencias en serie como el mostrado en la Figura 1.30, entonces la caída de voltaje en cualquier resistencia es proporcional al valor de dicha resistencia.

$$V_N = \left(\frac{R_x}{R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N} \right) V_s$$

En la ecuación anterior, R_x es la resistencia en de interés donde se desea conocer el voltaje particular V_x .

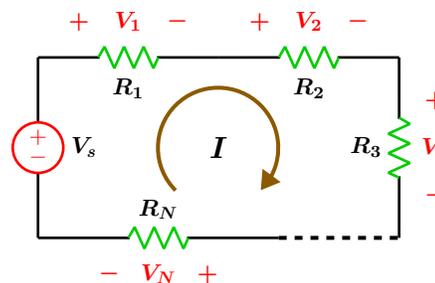


Figura 1.30: Circuito divisor de voltaje

Ejemplo 1.4.3

Para el circuito que se muestra en la Figura 1.31, obtenga el voltaje en cada resistencia y verifique que se cumple la ley de voltajes de Kirchoff, utilice la regla del divisor de voltaje.

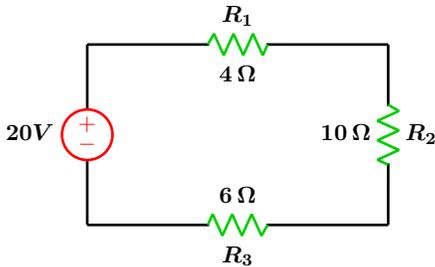


Figura 1.31: Divisor de voltaje

Solución

Se aplica el divisor de voltaje en cada una de las resistencias con lo que se obtiene:

$$V_{R_1} = \left(\frac{4}{4 + 10 + 6} \right) (20) = 4 \text{ V}$$

$$V_{R_2} = \left(\frac{10}{4 + 10 + 6} \right) (20) = 10 \text{ V}$$

$$V_{R_3} = \left(\frac{6}{4 + 10 + 6} \right) (20) = 6 \text{ V}$$

Como puede observarse fácilmente, la suma total de los voltajes de cada resistencia es igual al voltaje de la fuente, cumpliéndose así la ley de voltajes de Kirchoff.

1.4.10 Divisor de corriente

El divisor de corriente es una técnica que facilita obtener la corriente que circula por una resistencia sin conocer previamente el voltaje presente en la misma.

Si se tiene una configuración de varias resistencias en paralelo como el mostrado en la Figura 1.32, entonces la corriente I_x que circula en cualquier rama es igual a la resistencia total en paralelo R_T dividida entre la resistencia R_x de dicha rama y multiplicada por la corriente que entra al nodo al cual están conectadas las ramas en paralelo.

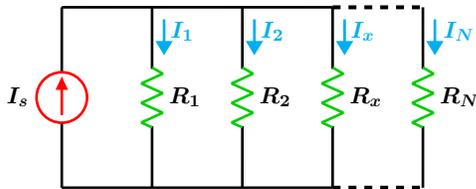


Figura 1.32: Divisor de corriente

general es:

$$I_x = \left(\frac{R_T}{R_x} \right) I_s$$

Para el caso particular de dos resistencias en paralelo como el que se muestra en la Figura 1.33 las corrientes en cada rama son las siguientes:

$$I_1 = \left(\frac{I_s}{R_1 + R_2} \right) R_2$$

$$I_2 = \left(\frac{I_s}{R_1 + R_2} \right) R_1$$

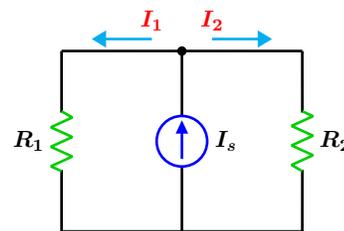


Figura 1.33: Dos resistencias en paralelo.

La expresión del divisor de corriente en su forma

Ejemplo 1.4.4 El divisor de corriente

Para el circuito que se muestra en la Figura 1.34, obtenga la corriente en cada resistencia y verifique que se cumple la ley de corrientes de Kirchhoff, utilice la regla del divisor de corriente.

Solución

Se aplica un divisor de corriente en cada resistencia con lo que se obtiene:

$$I_1 = \left(\frac{4}{1+3} \right) (3) = 3 \text{ A}$$

$$I_2 = \left(\frac{4}{1+3} \right) (1) = 1 \text{ A}$$

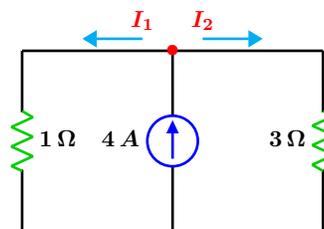


Figura 1.34: Divisor de corriente

Se observa que la corriente proporcionada por la fuente se reparte proporcionalmente en cada resistencia, con lo que se cumple la ley de corrientes de Kirchhoff.

1.5 Transformación de fuentes

En el análisis de circuitos eléctricos, algunas veces es conveniente transformar una fuente de voltaje en una fuente de corriente equivalente y a la inversa, esto con la finalidad de simplificar el circuito y los cálculos relacionadas con el mismo.

1.5.1 Transformación de fuentes

En la Figura 1.35 se muestra una relación de equivalencia entre una fuente de voltaje y una fuente de corriente. Las fuentes son equivalentes únicamente con respecto a los elementos que están conectados entre sus terminales. La condición

necesaria para que ambos diagramas sean equivalentes, es que el voltaje a circuito abierto entre las terminales a-b de los dos circuitos sean los mismos, así también la corriente de corto circuito en ambos esquemas deben ser iguales. El corto circuito simplemente se obtiene uniendo los extremos a-b.

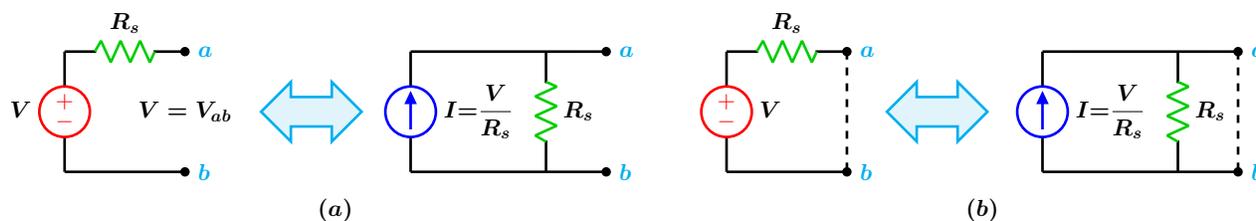


Figura 1.35: Fuentes equivalentes de voltaje y corriente: (a) condición de circuito abierto, (b) condición de corto circuito.

Ejemplo 1.5.1

Compruebe que los circuitos mostrados son equivalentes.

Solución

Se observa que el voltaje a circuito abierto en el circuito (a) es el voltaje de la fuente de 12 V. Al formar el corto circuito uniendo las terminales a-b la corriente es:

$$I = \frac{12}{2} = 6 \text{ A}$$

En el circuito (b), el voltaje a circuito abierto también es de 12 V, y al formar el corto circuito, la corriente es de 6 A a través del corto.

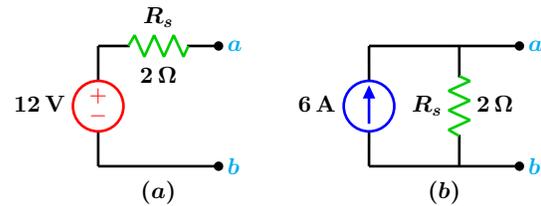


Figura 1.36: Circuitos equivalentes.

Ejemplo 1.5.2

Para el circuito que se muestra a la derecha, cambie la fuente de voltaje por una de corriente y compruebe que los voltajes y corrientes para una resistencia de carga de 13Ω son los mismos con ambas fuentes.

Solución

Para el circuito con la fuente de voltaje se tiene que:

$$R_T = R_s + R_C = 2 + 13 = 15 \Omega$$

$$I_T = \frac{V}{R_T} = \frac{30}{15} = 2 \text{ A}$$

$$V_{ab} = (R_C) (I_T) = (13) (2) = 26 \text{ V}$$

Para transformar una fuente de voltaje en una de corriente véase la Figura 1.38, se utiliza la siguiente expresión:

$$I = \frac{V}{R_s} = \frac{30}{2} = 15 \text{ A}$$

A continuación se obtiene la corriente que circula por la resistencia de carga con un divisor de corriente.

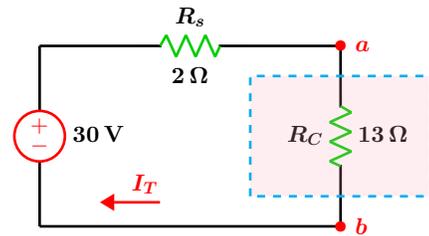


Figura 1.37: Circuito original.

$$I_{R_C} = \left(\frac{15}{13 + 2} \right) (2) = 2 \text{ A}$$

El voltaje entre la resistencia de carga es:

$$V_{ab} = (R_C) (I_{R_C}) = (13) (2) = 26 \text{ V}$$

Como se puede ver, los resultados con ambos modelos de circuito son idénticos.

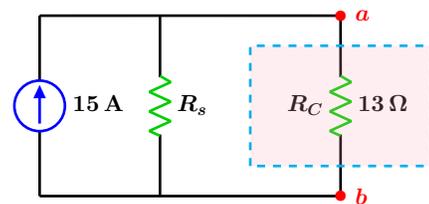


Figura 1.38: Fuente de corriente equivalente.

1.6 Transformación Estrella a Delta y Delta a Estrella

De un modo similar a la transformación de fuentes, en ocasiones es más sencillo analizar un circuito después de haberlo transformado en una forma equivalente. En esta sección se explica de manera resumida como transformar un circuito de tipo Delta a uno de tipo estrella y viceversa.

1.6.1 Conversión Δ a estrella

Cada resistor de la red estrella es el producto de los resistores de las dos ramas de la red delta adyacentes dividido entre la suma de los tres resistores de la red delta.

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} \\ R_2 &= \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \\ R_3 &= \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} \end{aligned} \quad (1.1)$$

1.6.2 Conversión estrella a Δ

Cada resistencia de la red delta es la suma de todos los productos posibles de las resistencias de la red estrella tomados de dos en dos, dividido entre la resistencia opuesta en estrella.

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2} \\ R_B &= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1} \\ R_C &= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3} \end{aligned} \quad (1.2)$$

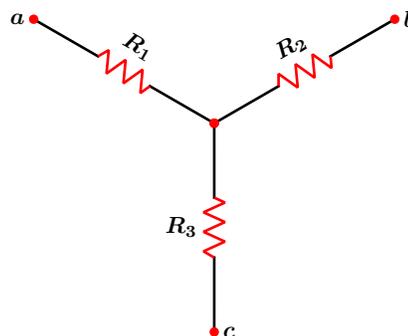


Figura 1.39: Configuración estrella.

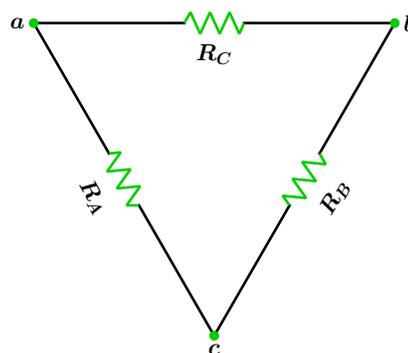


Figura 1.40: Configuración delta.

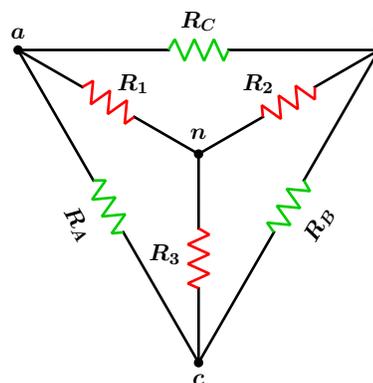


Figura 1.41: Configuraciones superpuestas.

Ejemplo 1.6.1

Para el circuito estrella que se muestra en la Figura 1.42 obtenga su equivalente en delta.

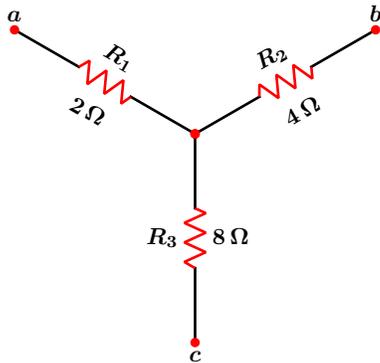


Figura 1.42: Configuración estrella.

Solución

Las ecuaciones que permiten transformar una configuración estrella en su correspondiente delta equivalente son:

$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}$$

Sustituyendo valores numéricos se obtiene:

$$R_A = \frac{(2)(4) + (2)(8) + (4)(8)}{4} = 14 \Omega$$

$$R_B = \frac{(2)(4) + (2)(8) + (4)(8)}{2} = 28 \Omega$$

$$R_C = \frac{(2)(4) + (2)(8) + (4)(8)}{8} = 7 \Omega$$

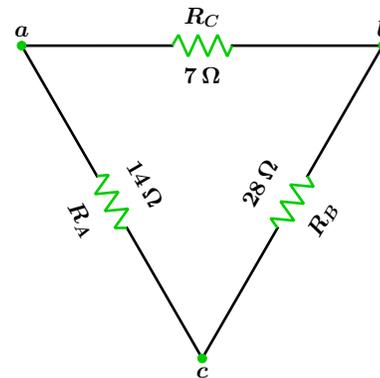


Figura 1.43: Configuración equivalente delta.

Ejemplo 1.6.2

Obtener el equivalente en estrella de la configuración en delta que se muestra en la Figura 1.44.

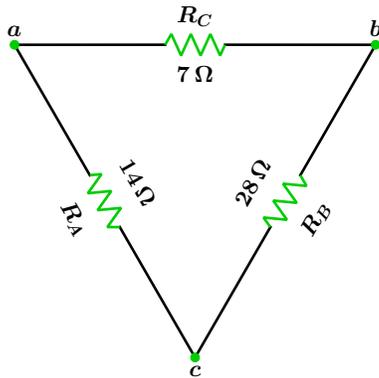


Figura 1.44: Configuración delta.

Solución

Las ecuaciones que permiten transformar una configuración delta en su equivalente estrella son:

$$R_1 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

Sustituyendo valores numéricos se tiene:

$$R_1 = \frac{(7)(14)}{14 + 7 + 28} = \frac{98}{49} = 2\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{(28)(7)}{14 + 7 + 28} = \frac{196}{49} = 4\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{(14)(28)}{14 + 7 + 28} = \frac{392}{49} = 8\ \Omega$$

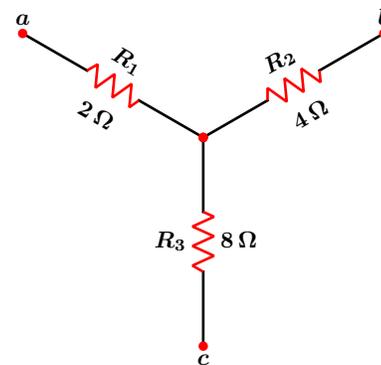


Figura 1.45: Configuración equivalente estrella.

1.7 Circuitos de primer orden

Los circuitos que contienen capacitores o inductores suelen representarse por medio de ecuaciones diferenciales. Un circuito de primer orden es aquel que contiene solamente un elemento de almacenamiento de energía, ya sea este un capacitor o inductor, lo que da lugar a que su ecuación representativa sea de primer orden.

1.7.1 Circuito RC sin excitación

Un circuito RC con condiciones iniciales ocurre cuando su fuente de alimentación se desconecta repentinamente, la energía almacenada en el capacitor da como consecuencia la aparición de un voltaje entre las terminales del mismo, estas son las condiciones iniciales con las que el circuito operara para $t \geq 0$, se puede establecer entonces que en $t = 0$ se tiene un voltaje inicial V_0 es decir $v(0) = V_0$. En la Figura 1.47 se muestra la respuesta natural o transitoria debida unicamente a la energía almacenada en el capacitor. La rapidez con la que el capacitor se descarga depende de su constante de tiempo τ .

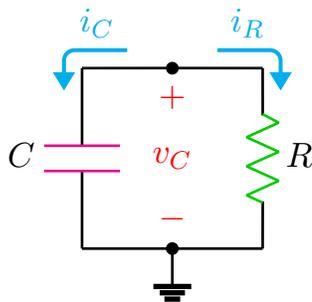


Figura 1.46: Circuito RC sin fuente.

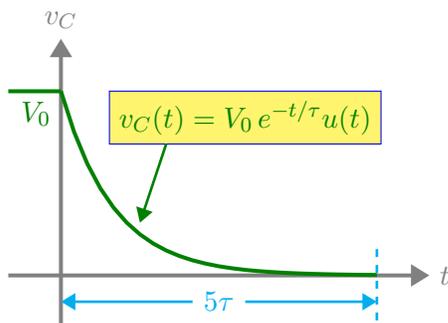


Figura 1.47: Respuesta transitoria del circuito RC

La ecuación diferencial que representa al circuito RC en su fase de descarga es:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \quad (1.3)$$

la constante de tiempo τ del circuito RC es:

$$\tau = RC \quad (1.4)$$

Otras expresiones de interés son:

$$i_C + i_R = 0$$

$$i_R(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} u(t)$$

$$p_R(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC} u(t)$$

$$w_R(t) = \frac{CV_0^2 (1 - e^{-2t/RC})}{2}$$

Respuesta natural: La respuesta natural se debe únicamente a la configuración del circuito y a la energía almacenada inicialmente en el capacitor, sin fuentes de alimentación externa.

Constante de tiempo: Es el tiempo que transcurre para que la respuesta alcance el 63.2 % del valor final a una entrada escalón.

1.7.2 Circuito RC con excitación

Considérese el circuito de primer orden con fuente de alimentación y condiciones iniciales nulas $v_c(0^-) = v(0) = v_c(0^+) = 0$ mostrado en la Figura 1.48, que se muestra en la Figura 1.48

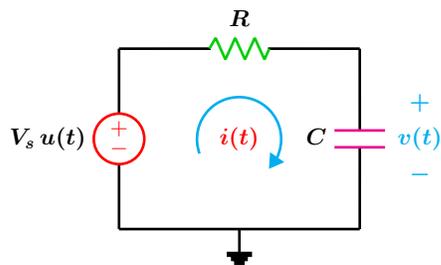


Figura 1.48: circuito RC con fuente

La ecuación diferencial que representa a dicho circuito es:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC} u(t) \quad (1.5)$$

y su correspondiente respuesta transitoria es:

$$v(t) = V_s (1 - e^{-t/\tau}) u(t) \quad (1.6)$$

la forma de la respuesta transitoria se muestra en la Figura 1.49.

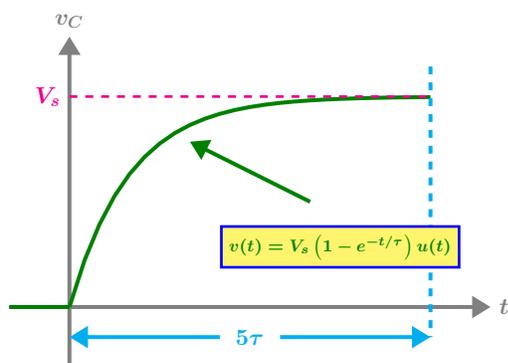


Figura 1.49: Respuesta transitoria del circuito RC

La corriente transitoria $i(t)$ adopta la siguiente forma:

$$i(t) = \left[\frac{V_s}{R} e^{-t/RC} \right] u(t) \quad (1.7)$$

Otras expresiones útiles son:

$$v_R(t) = (V_s e^{-t/RC}) u(t)$$

$$q(t) = CV_s (1 - e^{-t/RC}) u(t)$$

Como un caso particular, si el capacitor tiene una condición inicial $V_0 \neq 0$ en $t = 0$ las ecuaciones para el voltaje y corriente son respectivamente:

$$v_c(t) = [V_s + (V_0 - V_s) e^{-t/RC}] u(t) \quad (1.8)$$

$$i_c(t) = \left[\frac{V_s - V_0}{R} e^{-t/RC} \right] u(t)$$

Respuesta de estado permanente: Es el estado que alcanza el circuito mucho tiempo después de aplicarse una excitación externa. En la práctica suele considerarse que se ha alcanzado dicho estado después de cinco constantes de tiempo 5τ .

1.7.3 Circuito RL sin excitación

Un circuito RL sin fuente de excitación y con condiciones iniciales $i(0) = I_0$ se muestra en la Figura 1.50.

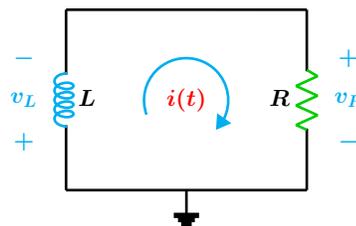


Figura 1.50: Circuito RL sin fuente.

La ecuación diferencial que representa a dicho circuito es:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad (1.9)$$

que al resolver para $i(t)$ se obtiene:

$$i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau} u(t) \quad (1.10)$$

La respuesta natural o transitoria debido a la energía almacenada en el inductor se muestra en la Figura 1.51.

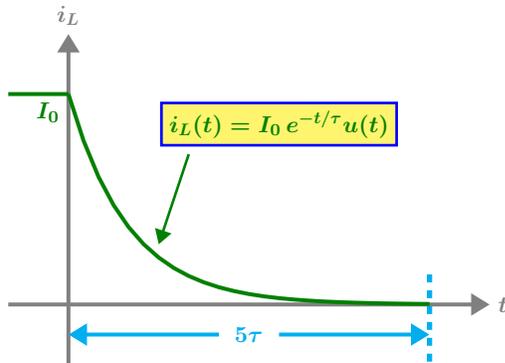


Figura 1.51: Respuesta transitoria del circuito RL

La constante de tiempo está dada por:

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (1.11)$$

Otras expresiones de utilidad son:

$$v_R(t) = I_0 R e^{-t/\tau} u(t)$$

$$p_R(t) = I_0^2 R e^{-2t/\tau} u(t)$$

$$w_R(t) = \frac{L I_0^2 (1 - e^{-2t/\tau})}{2} u(t)$$

$$v_R + v_L = 0$$

1.7.4 Circuito RL con excitación

Considérese el circuito de primer orden con fuente de alimentación y condiciones iniciales nulas $i_L(0^-) = i(0) = i_L(0^+) = 0$ mostrado en la Figura 1.52

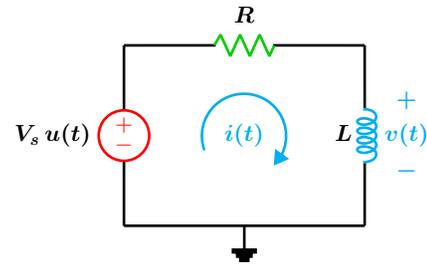


Figura 1.52: Circuito RL con fuente

La ecuación diferencial que representa a dicho circuito es:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V_s}{L} u(t) \quad (1.12)$$

cuya solución para $t \geq 0$ es:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} (1 - e^{-t/\tau}) u(t) \quad (1.13)$$

su representación se muestra en la Figura 1.53.

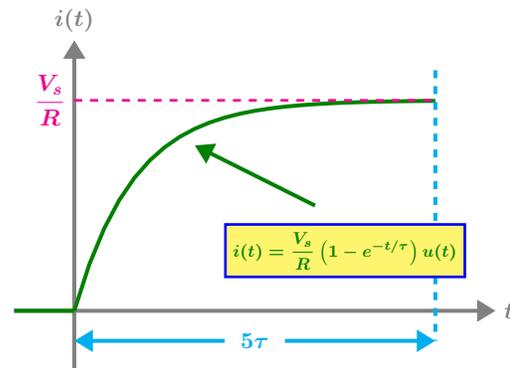


Figura 1.53: Respuesta transitoria del circuito RL

Otras expresiones de utilidad son:

$$v_L(t) = (V_s e^{-t/\tau}) u(t)$$

$$v_R = V_s (1 - e^{-t/\tau}) u(t)$$

Como caso particular, cuando el inductor tiene una condición inicial $I_0 \neq 0$ en $t = 0$ la corriente es:

$$i(t) = \left[\frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-t/\tau} \right] u(t) \quad (1.14)$$

Ejemplo 1.7.1

Para el circuito de la Figura 1.54, determine el voltaje $v(t)$ para $t \geq 0$ y la energía en el capacitor $w_c(0)$. El circuito ha alcanzado una respuesta permanente para $t < 0$.

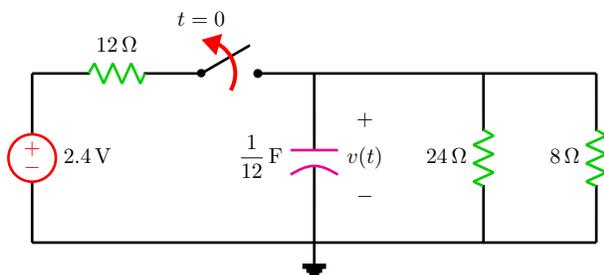


Figura 1.54: Circuito RC de primer orden

Solución

Se calcula el voltaje inicial del capacitor que será la condición inicial para la segunda etapa del análisis. Para $t < 0$ en CD, el capacitor se comporta como circuito abierto.

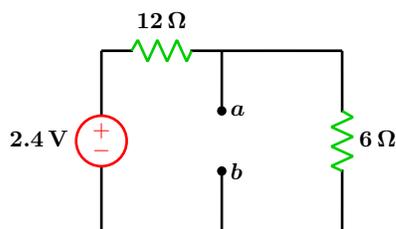


Figura 1.55: Condiciones iniciales

Mediante divisor de tensión se obtiene el voltaje V_{ab} .

$$V_{ab} = \left(\frac{6}{12 + 6} \right) (2.4) = 0.8 \text{ [V]}$$

La constante de tiempo del circuito RC es

$$\tau = RC = (6) \left(\frac{1}{12} \right) = \frac{1}{2} = 0.5$$

La ecuación de voltaje del capacitor en la fase de descarga es

$$v_C(t) = V_0 e^{-t/RC} u(t)$$

Sustituyendo valores se tiene que

$$v_C(t) = 0.8 e^{-2t} u(t)$$

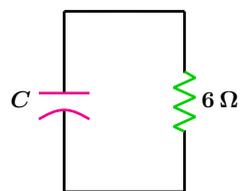


Figura 1.56: Segunda etapa del análisis

La energía almacenada en el capacitor en $t = 0$ es

$$w_C(0) = \frac{1}{2} CV^2 = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{12} \right) (0.8)^2$$

$$w_C(0) = 0.0266 \text{ [J]}$$

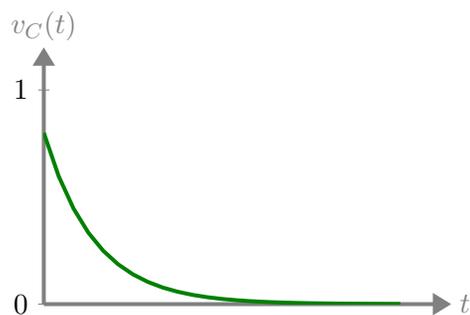


Figura 1.57: Respuesta transitoria del circuito RC

Ejemplo 1.7.2

Para el circuito que se muestra en la Figura 1.58, obtener $i_L(t)$ y $v(t)$ para $t \geq 0$. El circuito ha alcanzado una respuesta permanente para $t < 0$.

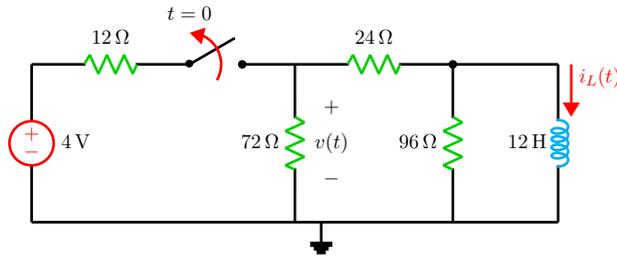


Figura 1.58: Circuito de primer orden RL

Solución

Primeramente se determinan las condiciones iniciales del inductor para $t \geq 0$. Para $t < 0$ en CD el inductor se ve como corto circuito.

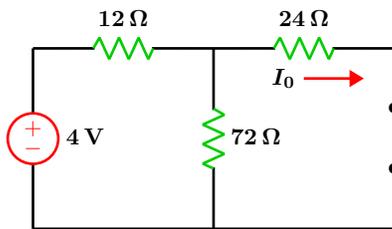


Figura 1.59: Condiciones iniciales

Mediante divisor de corriente se determina la corriente I_0 que es la condición inicial del inductor con la cual iniciará la segunda etapa del análisis.

$$I_0 = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ [A]}$$

Para $t \geq 0$ el interruptor está abierto, el circuito se muestra en la Figura 1.60.

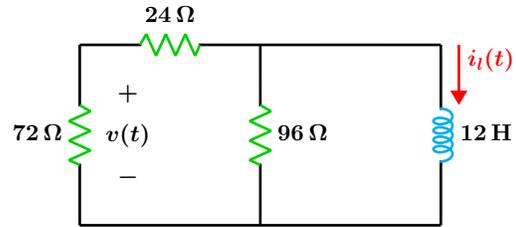


Figura 1.60: Circuito visto para $t \geq 0$

simplificando la parte resistiva se tiene:

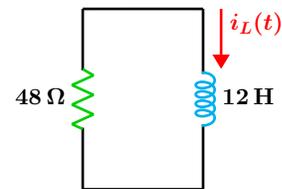


Figura 1.61: Circuito equivalente RL.

La resistencia total vista por el inductor es

$$R_T = 48 \Omega$$

La constante de tiempo es

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la corriente en el transitorio de descarga está dado por la siguiente expresión:

$$i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau} u(t)$$

El circuito para la fase transitoria de descarga se muestra en la Figura 1.61. Sustituyendo valores se tiene que

$$i_L(t) = \frac{1}{10} e^{-4t} u(t) = 0.1 e^{-4t} u(t)$$

$$i_x(t) = \frac{0.1 e^{-4t} u(t)}{2} = 0.05 e^{-4t} u(t)$$

$$v(t) = -72 i_x(t) = -3.6 e^{-4t} u(t)$$

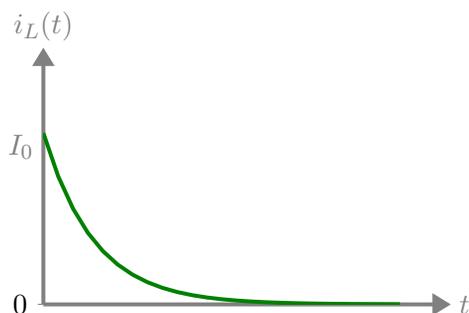


Figura 1.62: Respuesta transitoria del circuito RL

Ejemplo 1.7.3

Para el circuito de la Figura 1.63 determine $v_C(t)$ para $t > 0$. El circuito ha alcanzado una respuesta permanente para $t < 0$.

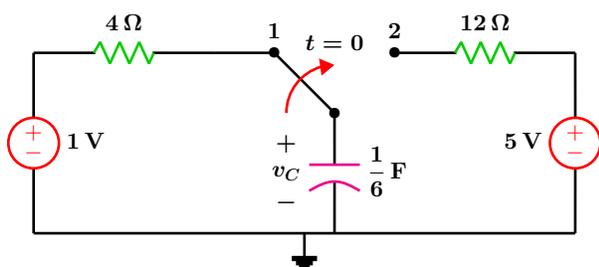


Figura 1.63: Circuito RC

Solución

Para $t < 0$, el interruptor se encuentra abierto y el capacitor ha alcanzado el estado permanente, por lo que se comporta como circuito abierto con una condición de voltaje inicial de $V_0 = 1 \text{ V}$.

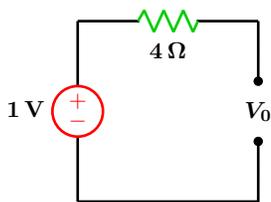


Figura 1.64: Condición inicial

Para $t \geq 0$, el interruptor cambia a la posición 2 y se muestra en la Figura 1.65.

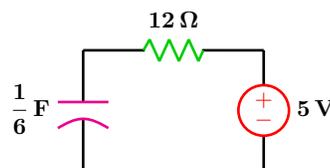


Figura 1.65: Análisis segunda etapa

Ahora se tiene un circuito RC con fuente y una condición inicial diferente de cero. La constante de tiempo es:

$$\tau = RC = (12) \left(\frac{1}{6} \right) = 2 \text{ [s]}$$

La ecuación diferencial que modela al circuito esta dada por:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{2} = \frac{5}{2} u(t)$$

cuya forma de respuesta es:

$$v_C(t) = \left[V_s + (V_0 - V_s) e^{-t/\tau} \right] u(t)$$

Al sustituir valores y simplificar se obtiene:

$$v_C(t) = \left(5 - 4e^{-t/2} \right) u(t)$$

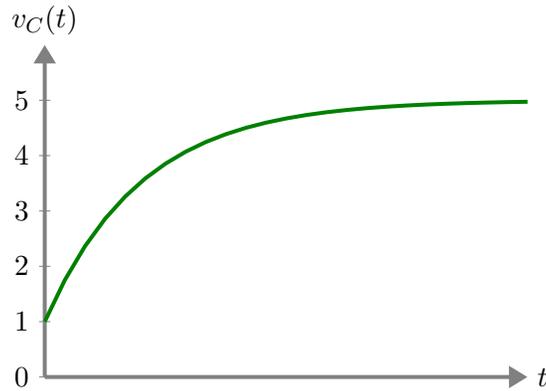


Figura 1.66: Respuesta transitoria del circuito RC

Ejemplo 1.7.4

Para el circuito de la Figura 1.67 determine $i_{R_1}(t)$ y $v_{R_2}(t)$. El circuito ha alcanzado una respuesta permanente para $t < 0$.

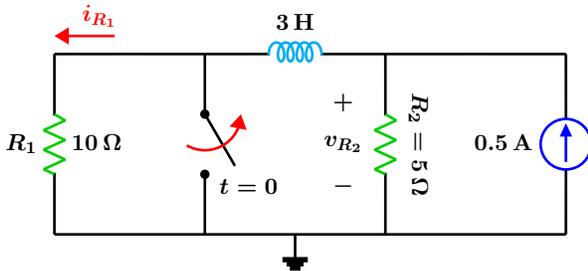


Figura 1.67: Circuito RL

Solución

Para $t < 0$, el interruptor se encuentra cerrado y el inductor actúa como corto circuito, del diagrama original se ve claramente que la condición inicial es:

$$I_0 = 0.5$$

Para la segunda etapa del análisis se cambia la fuente de corriente por su equivalente en fuente de voltaje.

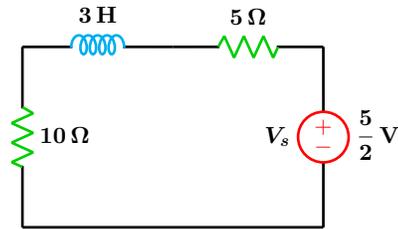


Figura 1.68: Segunda etapa, cambio de fuente

La resistencia total vista por la fuente de voltaje es

$$R_T = 15 \Omega$$

La constante de tiempo es

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

La expresión para calcular la corriente en el inductor es:

$$i_L(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-t/\tau} u(t)$$

sustituyendo valores y simplificando.

$$i_L(t) = i_{R_1}(t) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{-5t} \right) u(t)$$

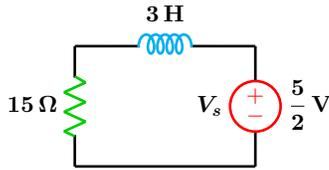


Figura 1.69: Circuito RL con fuente.

El voltaje en el inductor es

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{-5t} \right)$$

efectuando operaciones y simplificando se obtiene:

$$v_L(t) = -5 e^{-5t} u(t)$$

Del circuito original se tiene que el voltaje v_{R_2} es:

$$v_{R_2}(t) = v_L(t) + 10 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{-5t} \right)$$

efectuando operaciones y simplificando se tiene:

$$v_{R_2}(t) = \frac{5}{3} (1 - e^{-5t}) u(t)$$

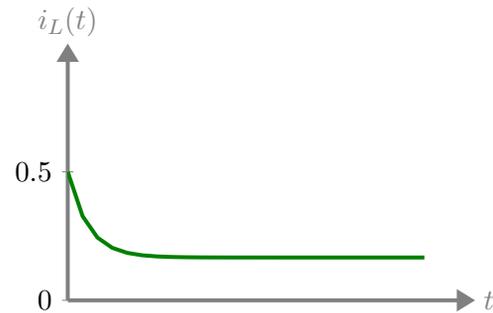


Figura 1.70: Respuesta transitoria del circuito RL

1.8 Circuitos de segundo orden

Un circuito de segundo orden es aquel que es caracterizado por una ecuación diferencial de segundo orden, en la que el circuito físico contiene dos elementos que almacenan energía de diferente tipo tales como inductores o capacitores, o bien dos elementos del mismo tipo que no pueden reducirse a una sola forma equivalente. Debido a que existen en la práctica diversas configuraciones de circuitos que dan lugar a ecuaciones diferenciales de segundo orden, en este texto se va a considerar la red serie clásica R-L-C para comprender los principios básicos.

1.8.1 Circuito RLC en serie sin fuente

Considérese el circuito mostrado en la Figura 1.71 el cual opera con condiciones iniciales $I_0 \neq 0$ y $V_0 \neq 0$.

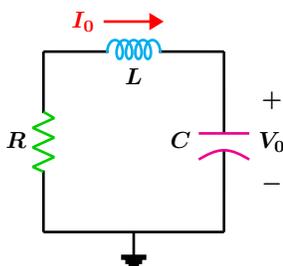


Figura 1.71: Circuito serie.

en función de la corriente que circula por el circuito, la ecuación diferencial de segundo orden es:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \quad (1.15)$$

de donde se sabe que la correspondiente ecuación característica es:

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (1.16)$$

Las soluciones para la ecuación característica

son las siguientes:

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (1.17)$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

A las raíces s_1 y s_2 se les conocen como **frecuencias naturales** y sus unidades son (Np/s). De forma compacta dichas raíces se pueden expresar como:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (1.18)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

de donde se pueden establecer las relaciones siguientes:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (1.19)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A α se le conoce como factor de amortiguamiento o frecuencia neperiana, sus unidades son (Np/s).

A ω_0 se le llama frecuencia de resonancia o frecuencia natural no amortiguada, sus unidades son (rad/s).

De las expresiones (1.18) se deduce que existen tres posibles soluciones dependiendo de si $\alpha > \omega_0$ o $\alpha = \omega_0$ o bien $\alpha < \omega_0$ cada una con su respectivo nombre y forma de respuesta estas son:

Caso sobreamortiguado $\alpha > \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces s_1, s_2 son reales y distintas, esto implica que $C > \frac{4L}{R^2}$. La respuesta es:

$$i(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (1.20)$$

Caso críticamente amortiguado $\alpha = \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces de la ecuación característica son iguales $s_1 = s_2$ esto impli-

ca que $C = \frac{4L}{R^2}$. La respuesta es:

$$i(t) = (K_2 + K_1 t) e^{-\alpha t} \quad (1.21)$$

Caso subamortiguado $\alpha < \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces de la ecuación característica son iguales complejas conjugadas teniendo la forma $s_1, s_2 = -\alpha \pm j\omega_d$ donde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ la cual se conoce como frecuencia de amortiguamiento. Esto implica que $C < \frac{4L}{R^2}$, la respuesta es:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t) \quad (1.22)$$

Para obtener las constantes K_1 y K_2 se requieren de las condiciones iniciales de $i(t)$ y de su primera derivada, las cuales se obtienen mediante:

$$i(0) = I_0 \quad \frac{di(0)}{dt} = \frac{-(RI_0 + V_0)}{L} \quad (1.23)$$

Circuito LC sin pérdidas $\alpha = 0$

Considere el caso teórico sin pérdidas de un circuito LC el cual se muestra en la Figura 1.72, en el que la respuesta es infinitamente oscilatoria.

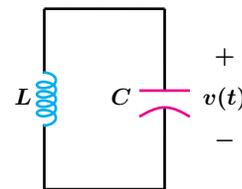


Figura 1.72: Circuito LC sin pérdidas.

El circuito es irrealizable físicamente ya que siempre existe una resistencia debido a los propios conductores y al material con que están contruidos los elementos que terminara por agotar la energía almacenada llevándola a cero.

Considerando que las condiciones iniciales del circuito son $I_0 = 0$ y $V_0 \neq 0$ si la respuesta o señal

de salida es el voltaje del capacitor $v(t)$, entonces la ecuación diferencial que representa a dicho circuito es:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{LC} = 0 \quad (1.24)$$

y su correspondiente ecuación característica es:

$$s^2 + \frac{1}{LC} = 0 \quad (1.25)$$

Para este caso se tiene que las raíces de la ecuación característica son imaginarias puras $s_1, s_2 = \pm j\omega_d$, la respuesta es:

$$v(t) = K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t \quad (1.26)$$

Para obtener las constantes K_1 y K_2 se requieren las condiciones iniciales siguientes:

$$v(0) = V_0 \quad \frac{dv(0)}{dt} = 0 \quad (1.27)$$

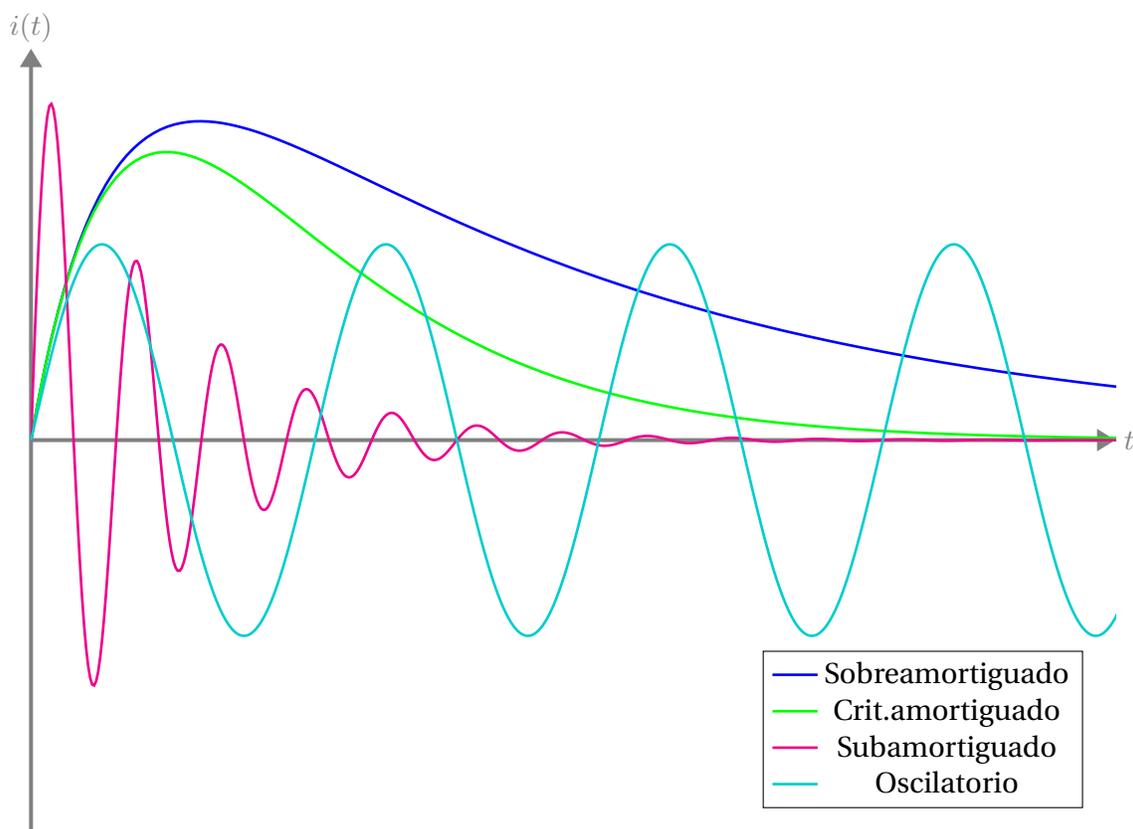


Figura 1.73: Gráficas de las posibles respuestas para un circuito de segundo orden.

Ejemplo 1.8.1

Considere el circuito de la Figura 1.72 con un voltaje inicial en el capacitor de 4V y corriente cero. Obtenga una expresión de $v(t)$ para $t > 0$. $L = 2$ H y $C = \frac{1}{2}$ F.

Solución

De las ecuaciones (1.19) se tiene que $\alpha = 0$ y $\omega_0 = 1$, por lo que se tiene un caso de tipo oscilatorio cuya respuesta esta dada por:

$$v(t) = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t$$

De la condición inicial $v(0) = V_0 = 4$ V se tiene que:

$$v(0) = 4 = K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0)$$

$$K_1 = 4$$

$$v(t) = 4 \cos(t) + K_2 \sin(t)$$

Para obtener K_2 se hace uso de la expresión:

$$\frac{dv(0)}{dt} = 0$$

Se deriva la función y se iguala a cero:

$$v'(t) = -4 \sin(t) + K_2 \cos(t)$$

$$v'(0) = -4 \sin(0) + K_2 \cos(0)$$

$$K_2 = 0$$

$$v(t) = 4 \cos(t) u(t)$$

Ejemplo 1.8.2

Para un circuito RLC en serie con valores de $L = 2$ H y $C = \frac{1}{2}$ F, determine los valores de la resistencia que harían tener una respuesta sobreamortiguada y subamortiguada.

Solución

Se obtiene primeramente la resistencia que hace tener el caso críticamente amortiguado,

es decir cuando $\alpha = \omega_0$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{2}\right)}} = 1$$

$$\frac{R}{2L} = 1 \implies R = 2(2) = 4 \Omega$$

Para valores de $R > 4$ se obtiene la respuesta sobreamortiguada, y para valores menores la respuesta subamortiguada.

1.8.2 Circuito RLC en paralelo sin fuente

Considérese el circuito mostrado en la Figura 1.74 con condiciones iniciales $I_0 \neq 0$ y $V_0 \neq 0$, en función del voltaje presente en los elementos, la ecuación diferencial de segundo orden es:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \quad (1.28)$$

y su correspondiente ecuación características es:

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (1.29)$$

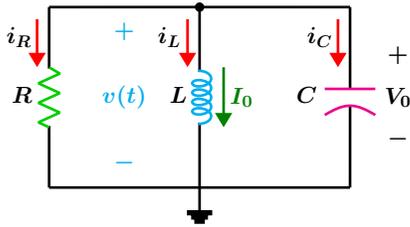


Figura 1.74: Circuito paralelo.

Las soluciones para la ecuación características son:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (1.30)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

De forma compacta las raíces se puede expresar como:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (1.31)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.32)$$

El análisis que se hace y las ecuaciones que se obtienen son básicamente las mismas que para el caso anterior, solo que aquí se trabaja con voltajes en vez de corrientes.

Al igual que en el circuito RLC serie aquí también se tiene tres posibles formas de onda para la respuesta de salida, dependiendo de si $\alpha > \omega_0$ o $\alpha = \omega_0$ o bien $\alpha < \omega_0$.

Caso sobreamortiguado $\alpha > \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces s_1, s_2 son reales y distintas, esto implica que $L > 4R^2C$. La respuesta es:

$$v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (1.33)$$

Caso críticamente amortiguado $\alpha = \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces de la ecuación característica son iguales $s_1 = s_2$ esto implica que $L = 4R^2C$. La respuesta es:

$$v(t) = (K_2 + K_1 t) e^{-\alpha t} \quad (1.34)$$

Caso subamortiguado $\alpha < \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces de la ecuación característica son iguales complejas conjugadas teniendo la forma $s_1, s_2 = -\alpha \pm j\omega_d$ donde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ la cual se conoce como frecuencia de amortiguamiento. Esto implica que $L < 4R^2C$, la respuesta es:

$$v(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t) \quad (1.35)$$

Para obtener las constantes K_1 y K_2 se requieren de las condiciones iniciales de $v(t)$ y de su primera derivada, las cuales se obtienen mediante:

$$v(0) = V_0 \quad \frac{dv(0)}{dt} = \frac{-(RI_0 + V_0)}{RC} \quad (1.36)$$

Las formas de onda para el voltaje son similares a las que se muestran en la Figura 1.73.

1.8.3 Circuito RLC en serie con fuente

En esta ocasión se considerara el circuito RLC en serie y con una fuente de excitación, en el cual la variable de salida será el voltaje en el capacitor como se ilustra en la Figura 1.75.

Al aplicar la LVK al circuito en dirección de la corriente se tiene el modelo siguiente:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC} \tag{1.37}$$

y su correspondiente ecuación características es:

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{1.38}$$

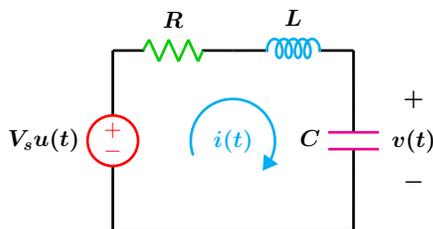


Figura 1.75: Circuito RLC con fuente.

Obsérvese la similitud que existe entre las ecuaciones (1.15) y (1.37) para el modelo del circuito y entre sus respectivas ecuaciones características (1.16) y (1.38), los coeficientes son los mismos pero la variable de salida es diferente.

La respuesta en estado permanente del voltaje en el capacitor es igual al de la fuente de excitación, por lo que se tiene la solución completa para los tres casos posibles, estas son:

Caso sobreamortiguado

$$v(t) = V_s + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

Caso Crit. Amortiguado

$$v(t) = V_s + (K_2 + K_1 t) e^{-\alpha t}$$

Caso Subamortiguado

$$v(t) = V_s + e^{-\alpha t} (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t)$$

Las constantes K_1 y K_2 se obtienen de las condiciones iniciales $v(0)$ y $\frac{dv(0)}{dt}$.

1.8.4 Circuito RLC paralelo con fuente

Considere el circuito paralelo con fuente de excitación mostrado en la Figura 1.76. La variable de salida es $i(t)$ en el inductor. Al aplicar la LCK en el nodo superior se tiene que la ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_s}{LC} \tag{1.39}$$

y su ecuación características es:

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{1.40}$$

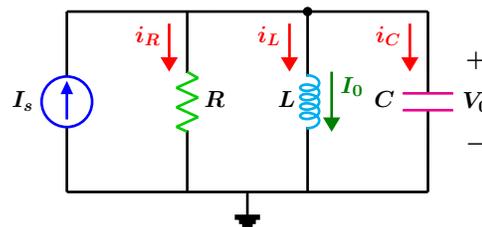


Figura 1.76: Circuito paralelo con fuente.

De nueva cuenta observe la similitud con las ecuaciones (1.28) y (1.29). Los coeficientes son los mismos pero la variable de salida es diferente.

La respuesta en estado permanente de la corriente en el inductor es igual al de la fuente de excitación, por lo que se tiene la solución completa para los tres casos posibles, estas son:

Caso Sobreamortiguado

$$i(t) = I_s + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

Caso Crit. Amortiguado

$$i(t) = I_s + (K_2 + K_1 t) e^{-\alpha t}$$

Caso Subamortiguado

$$i(t) = I_s + e^{-\alpha t} (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t)$$

Ejemplo 1.8.3

En el circuito de la Figura 1.77 el interruptor ha estado cerrado durante mucho tiempo y en $t = 0$ cambia a la posición 2, obtenga $i(t)$ y $v(t)$ para $t > 0$. Considere al capacitor inicialmente descargado.

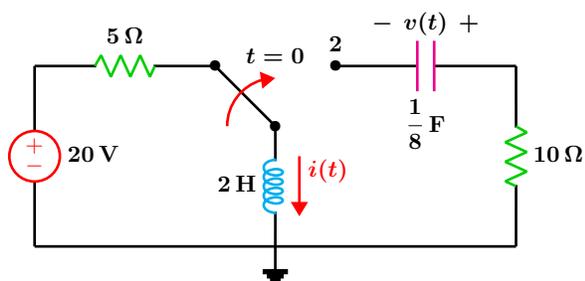


Figura 1.77: Circuito RLC.

Solución

Para $t < 0$ el circuito ha alcanzado el estado permanente y el inductor actúa como corto circuito, la corriente en esta etapa será la condición inicial que tiene el inductor para la segunda parte del análisis es decir para $t > 0$ la corriente es:

$$i(0) = I_0 = \frac{20}{5} = 4 \text{ A}$$

Para $t > 0$ el interruptor cambia a la posición 2 como se muestra en la Figura 1.78.

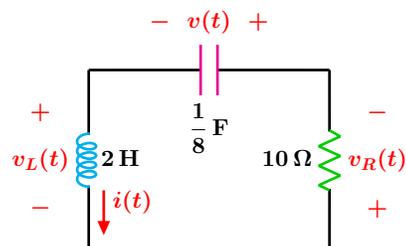


Figura 1.78: Circuito RLC.

Se empieza por obtener los valores de α y ω_0 para determinar que tipo de respuesta o forma de onda es la que se espera de acuerdo a los valores de los componentes. Con las ecuaciones (1.19) se tiene.

$$\alpha = \frac{10}{(2)(2)} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(2)(0.125)}} = 2$$

Como $\alpha > \omega_0$ se tiene el caso sobreamortiguado cuya respuesta es:

$$i(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

Ahora se obtienen las raíces de la ecuación característica con las expresiones (1.18).

$$s_{1,2} = -2.5 \pm \sqrt{(2.5)^2 - (2)^2}$$

$$s_1 = -1 \quad s_2 = -4$$

Sustituyendo las raíces anteriores en la forma de onda se obtiene:

$$i(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t}$$

Para obtener las constantes K_1 y K_2 se utilizan las condiciones iniciales de la función y de su primera derivada. Comenzando con $i(0) = 4$ A se obtiene:

$$i(0) = K_1 e^0 + K_2 e^0$$

$$K_1 + K_2 = 4 \cdots (1)$$

Recordando que la condición inicial de la primera derivada está dada por:

$$\frac{di(0)}{dt} = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{-(RI_0 + V_0)}{L}$$

sustituyendo valores se tiene:

$$\frac{di(0)}{dt} = \frac{-(10(4) + 0)}{2} = -20$$

Se obtiene la derivada de $i(t)$ lo cual da:

$$\frac{di}{dt} = -K_1 e^{-t} - 4K_2 e^{-4t}$$

la derivada se evalúa en $t = 0$:

$$i'(0) = -K_1 e^0 - 4K_2 e^0$$

igualando con la condición inicial resulta:

$$K_1 + 4K_2 = 20 \cdots (2)$$

Se resuelve de forma simultanea las ecuaciones (1) y (2) luego se sustituyen los valores en $i(t)$ obteniéndose lo siguiente:

$$i(t) = \left(-\frac{4}{3} e^{-t} + \frac{16}{3} e^{-4t} \right) u(t)$$

Para obtener $v(t)$ se aplica la LVK al circuito de la Figura 1.78 lo que resulta en:

$$v_L(t) + v_R(t) + v(t) = 0$$

$$v(t) = -(v_L(t) + v_R(t))$$

donde $v_L(t) = L \frac{di}{dt}$ es el voltaje en el inductor y $v_R(t) = R i(t)$ es el voltaje en la resistencia. Efectuando las operaciones indicadas se obtiene que:

$$v(t) = \frac{32}{3} e^{-4t} (-1 + e^{3t}) u(t)$$

1.9 La Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace es una de las herramientas matemáticas más poderosas para diseñar, analizar y sintetizar sistemas dinámicos en particular circuitos eléctricos. En la presente sección se utiliza esta herramienta para el análisis de circuitos eléctricos en el dominio "s" como método alternativo al uso de las ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo.

Los modelos matemáticos asociados a los sistemas lineales e invariantes en el tiempo son representados por ecuaciones diferenciales lineales, ordinarias y de coeficientes constantes de la forma dada por la siguiente expresión.

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^M a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (1.41)$$

Donde $y(t)$ es la señal de salida, $x(t)$ es la señal de entrada. Como un caso particular, cuando $n = 1$ y $m = 0$ se tiene una ecuación diferencial de primer orden $a_1 \frac{dy(t)}{dt} = a_0 x(t)$ donde, para el caso de circuitos eléctricos $x(t)$ puede ser constante o una forma de onda senoidal.

Procedimiento para aplicar la Transformada de Laplace

- 1 Se transforma el circuito del dominio temporal al dominio “s”.
- 2 Se resuelve el circuito en el dominio “s”.
- 3 Se aplica la Transformada Inversa de Laplace al resultado y se obtiene así la respuesta en el dominio del tiempo.

En seguida se muestran las equivalencias de los componentes entre ambos dominios así como la interpretación de los valores iniciales que tienen los elementos que almacenan energía. **Nota: Si no se especifica ningún valor inicial en un elemento que almacene energía, se asumirá por defecto que sus condiciones iniciales son nulas.**

1.9.1 Inductor en el dominio “s”

Para obtener las relaciones de corriente-voltaje en un inductor entre ambos dominios se parte de la ecuación (1.42).

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.42)$$

Al obtener la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación se obtiene que:

$$V(s) = L(sI(s) - i(0))$$

$$V(s) = sLI(s) - Li(0)$$

Haciendo un poco de álgebra se tienen las expresiones siguientes.

$$V(s) = sLI(s) - Li(0) \quad (1.43)$$

$$I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0)}{s}$$

Las equivalencias en el dominio “s” se muestran en la Figura 1.79, en donde la condición inicial aparece como una fuente de voltaje o de corriente.

Dependiendo de la configuración del circuito que se está analizando, será conveniente utilizar una equivalencia que facilite los cálculos posteriores.

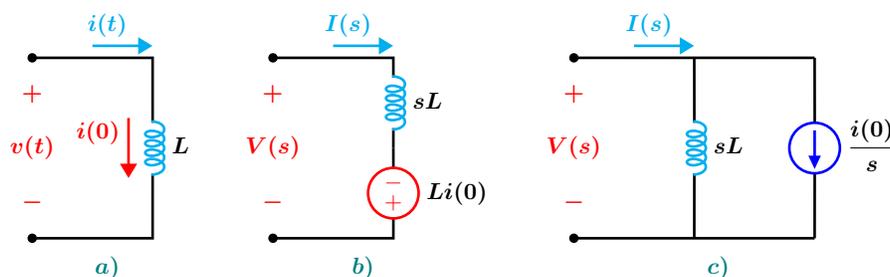


Figura 1.79: Representación de un inductor: a) dominio del tiempo, b) y c) equivalentes en el dominio “s”.

1.9.2 Capacitor en el dominio “s”

Para obtener las relaciones de corriente-voltaje en un capacitor entre ambos dominios se parte de la ecuación (1.44).

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \tag{1.44}$$

Al obtener la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación se obtiene que:

$$I(s) = C (sV(s) - v(0))$$

$$I(s) = sCV(s) - Cv(0)$$

Haciendo un poco de álgebra se tienen las expresiones siguientes:

$$I(s) = sCV(s) - Cv(0) \tag{1.45}$$

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{V(0)}{s}$$

Las equivalencias en el dominio “s” se muestran en la Figura 1.80, en donde la condición inicial aparece como una fuente de voltaje o de corriente.

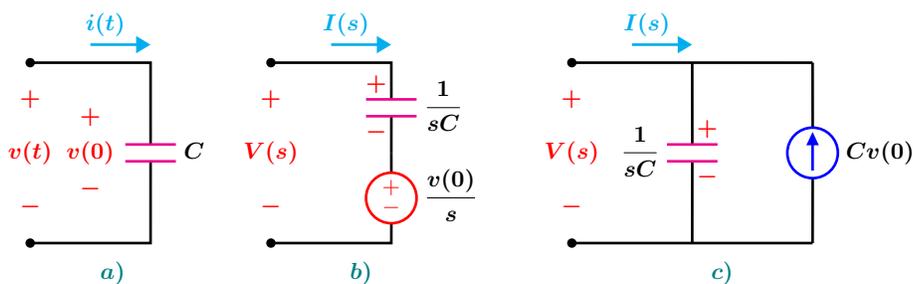


Figura 1.80: Representación de un capacitor: a) dominio del tiempo, b) y c) equivalentes en el dominio “s”.

1.9.3 Resistencia y fuentes en el dominio “s”

Para obtener la relación voltaje-corriente en una resistencia se parte de la ecuación (1.46).

$$v(t) = Ri(t) \tag{1.46}$$

Al obtener la Transformada de Laplace a ambos

lados se obtiene que:

$$V(s) = RI(s) \tag{1.47}$$

En la Figura 1.81 se muestra la equivalencia para una resistencia entre ambos dominios.

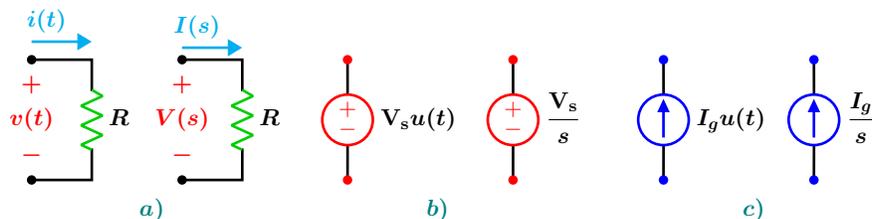


Figura 1.81: Representación de una resistencia: a) dominio del tiempo y “s”, b) Equivalente de una fuente de voltaje y c) Equivalente de una fuente de corriente.

1.9.4 Impedancia y Admitancia

En el dominio “s” la impedancia esta definida como el cociente de la transformada del voltaje a la transformada de la corriente, considerando las condiciones iniciales nulas, tiene la siguiente forma:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (1.48)$$

De las ecuaciones (1.43), (1.45) y (1.47), considerando nulas las condiciones iniciales, se tienen las impedancias de los tres elementos bási-

cos que son:

$$\begin{aligned} \text{Resistencia} \quad Z(s) &= R \\ \text{Inductor} \quad Z(s) &= sL \\ \text{Capacitor} \quad Z(s) &= \frac{1}{sC} \end{aligned} \quad (1.49)$$

La admitancia se define como el recíproco de la impedancia y tiene la forma siguiente:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{I(s)}{V(s)} \quad (1.50)$$

Ejemplo 1.9.1

Considere nuevamente el circuito de la Figura 1.77 después de que el interruptor se encuentra en la posición 2 y el inductor tiene la condición inicial $I_0 = 4$ A. En este ejemplo se utiliza el método de la Transformada de Laplace o del dominio “s” para obtener $i(t)$ y $v(t)$ de una manera más rápida y sencilla que en el dominio del tiempo.

Solución

Se transforma el circuito de la Figura 1.78 del dominio del tiempo al de la frecuencia “s”, para ello se reemplaza cada componente por su equivalente en el dominio “s” véase la Figura 1.82.

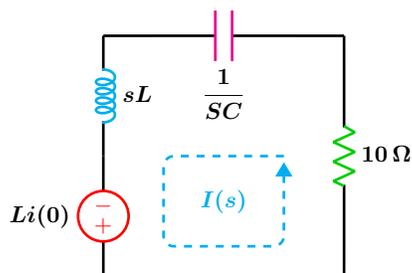


Figura 1.82: Circuito en el dominio “s”.

La fuente de voltaje es la representación de la condición inicial del inductor y se dibuja con la polaridad indicada de modo que la corriente entre por la terminal negativa.

Aplicando la LVK en sentido antihorario para encontrar $I(s)$ que es la corriente en el dominio “s”.

$$\begin{aligned} -8 + 10I(s) + \frac{8}{s}I(s) + 2sI(s) &= 0 \\ I(s) &= \frac{4s}{s^2 + 5s + 4} \end{aligned}$$

Se obtiene la transformada inversa de Laplace para regresar al dominio del tiempo

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s}{s^2 + 5s + 4} \right\} \\ i(t) &= \left(-\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{16}{3}e^{-4t} \right) u(t) \end{aligned}$$

El procedimiento para obtener $v(t)$ es similar al que se utilizó para encontrar $i(t)$.

$$V(s) = \left(\frac{8}{s}\right) I(s)$$

$$V(s) = \frac{32}{s^2 + 5s + 4}$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{32}{s^2 + 5s + 4} \right\}$$

$$v(t) = \frac{32}{3} e^{-4t} (-1 + e^{3t}) u(t)$$

1.10 La Función de Transferencia

Un análisis alternativo al del dominio del tiempo, para obtener la respuesta de un sistema es a través de la Transformada de Laplace, el cual se lleva a cabo mediante el uso de la variable compleja “s”. Al transformar la ecuación (1.41) y considerando las condiciones iniciales nulas, se obtiene:

$$\sum_{n=0}^N a_n s^n Y(s) = \sum_{m=0}^M b_m s^m X(s) \quad (1.51)$$

Al tomar el cociente entre $Y(s)$ y $X(s)$ se obtiene una expresión importante llamada función de transferencia que se denota como $H(s)$ siendo una función racional de s y $m < n$, tiene la forma siguiente:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^m}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} \quad (1.52)$$

Una función de transferencia depende de los parámetros que se establezcan como salida y como entrada. La entrada siempre es la función que excita al circuito.

Para el caso de circuitos eléctricos los parámetros de entrada y/o de salida son voltajes y corrientes, por lo que se tienen únicamente cuatro posibles funciones de transferencia que son:

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \text{Función de transferencia de voltajes}$$

$$H(s) = \frac{I_0(s)}{I_i(s)} = \text{Función de transferencia de corrientes}$$

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{I_i(s)} = \text{Función de transferencia de impedancia}$$

$$H(s) = \frac{I_0(s)}{V_i(s)} = \text{Función de transferencia de admitancia}$$

(1.53)

También, es posible expresar la función de transferencia como una razón de polinomios en “s”, en donde el polinomio del numerador contiene los coeficientes de la entrada y de sus derivadas, b_m , y el

polinomio del denominador incluye los coeficientes de la salida y de sus derivadas, a_n .

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.54)$$

Como caso particular cuando $M = 0$ y $N = 2$ se tiene la Función de Transferencia para un circuito de segundo orden que es:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (1.55)$$

La Función de Transferencia es de suma importancia, ya que permite determinar la respuesta a cualquier entrada, formando simplemente el producto $Y(s) = H(s)X(s)$.

Ejemplo 1.10.1

Considere un circuito eléctrico de primer orden cuyo comportamiento esta dado por la ecuación diferencial $\frac{di(t)}{dt} + i(t) = u(t)$ y condiciones iniciales nulas, obtenga la función de transferencia de admitancia.

Solución

Al resolver la ecuación diferencial para $i(t)$ se tiene que:

$$i(t) = (1 - e^{-t}) u(t)$$

Al obtener la Transformada de Laplace a la función anterior se tiene:

$$I(s) = \frac{1}{s^2 + s}$$

La Transformada de Laplace de $u(t)$ es $\frac{1}{s}$, por lo que la función de transferencia de admitancia es:

$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{s + 1}$$

Ejemplo 1.10.2

Como un ejemplo de aplicación de la función de transferencia, para la red en escalera siguiente, determine la función de transferencia de corrientes.

Considerando que los elementos tienen los valores siguientes:

$$Z_1 = Z_4 = 22 \mu\text{F} \quad Z_2 = Z_3 = 100 \Omega$$

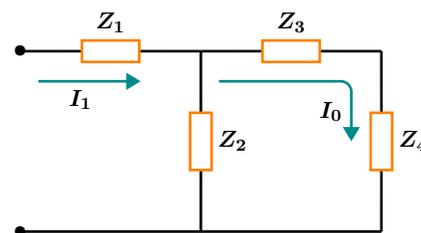


Figura 1.83: Circuito con impedancias

Solución

Por divisor de corriente se tiene que:

$$I_0 = \frac{I_1 Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

La Transformada de Laplace del capacitor es $\frac{1}{sC}$, por lo que sustituyendo valores en la expresión anterior y simplificando se tiene:

$$H(s) = \frac{11s}{22s + 5000}$$