Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ingeniería Eléctrica

Análisis de Circuitos Eléctricos
Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández
Proyecto PAPIME PE100920
Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Resistencias en serie

Un circuito serie es aquel en el que la corriente que fluye por cada elemento es la misma véase la **Figura 1**.

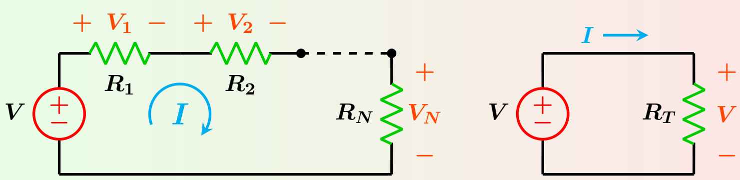


Figura 1: Resistencias en serie y circuito equivalente.

Resistencia Equivalente

$$R_T = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$$

Ley de Ohm

$$V = RI$$

Resistencias en paralelo

Un circuito paralelo es aquel en el que el voltaje presente en los elementos es el mismo véase la **Figura 2**.

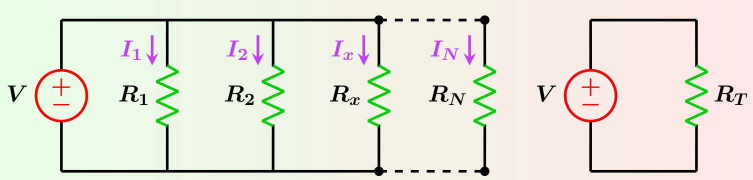


Figura 2: Resistencias en paralelo y circuito equivalente.

Resistencia Equivalente

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$

Conductancia

$$G_T = \frac{1}{R_T} \quad [\mathrm{S}]$$

Fórmulas de potencia

Fórmulas de potencia más utilizadas en CD.

1. $P = VI$ [W]
2. $P = I^2 R$ [W]
3. $P = \dfrac{V^2}{R}$ [W]

Ley de Ohm

Ley de OHM: Ley básica de los circuitos eléctricos, establece que la corriente en un circuito resistivo es directamente proporcional al voltaje aplicado e inversamente proporcional a su resistencia.

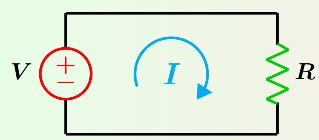


Figura 3: Ley de Ohm.

Ley de Ohm

$$I = \frac{V}{R}$$

Divisor de voltaje

Divisor de voltaje: En la **Figura 1**, el voltaje en cualquier resistencia es proporcional al valor de dicha resistencia.

Divisor de voltaje

$$V_x = \left(\frac{R_x}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N}\right) V$$

Divisor de corriente

Divisor de corriente: Si se tiene una configuración de varias resistencias en paralelo como el mostrado en la **Figura 2** entonces la corriente I_x que circula en cualquier rama es:

Div de corriente

$$I_x = \left(\frac{R_T}{R_x}\right) I_T$$

Div de corriente

$$I_x = \left(\frac{G_x}{G_T}\right) I_T$$

Conductancia (Siemens)

$$G_T = G_1 + G_2 + \cdots + G_N$$

Dos resistencias en paralelo

Si se tienen dos resistencias en paralelo como la que se muestra en la **Figura 4**, la resistencia equivalente y la corriente en cada rama son respectivamente:

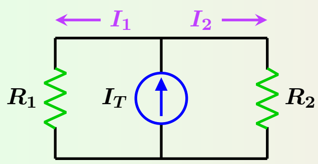


Figura 4: Dos Resistencias.

Equivalente

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Divisor de corriente para dos resistencias

$$I_1 = \left(\frac{I_T}{R_1 + R_2}\right) R_2 \qquad I_2 = \left(\frac{I_T}{R_1 + R_2}\right) R_1$$

Ley de voltajes de Kirchhoff

Ley de voltajes de Kirchhoff: La suma de las elevaciones de voltaje es igual a la suma de las caídas de voltaje alrededor de una trayectoria cerrada.

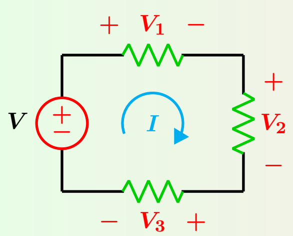


Figura 5: Circuito.

Suma de voltajes

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Ley de voltajes

$$\sum_{\circlearrowright} V_{\text{elevaciones}} = \sum_{\circlearrowright} V_{\text{caidas}}$$

Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Ley de corrientes de Kirchhoff

Ley de corrientes de Kirchhoff: La suma de corrientes que entran en un nodo es igual a la suma de corrientes que salen del mismo. Ver **Figura 6**.

Ley de corrientes

$$\sum I_{\longrightarrow \text{nodo}} = \sum I_{\text{nodo} \longrightarrow}$$

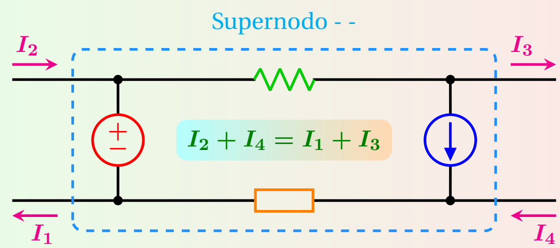


Figura 6: Ley de corrientes de Kirchhoff.

Transformación de fuentes

Circuitos equivalentes entre las terminales a y b. El voltaje a circuito abierto y la corriente de corto circuito en ambos circuitos es el mismo.

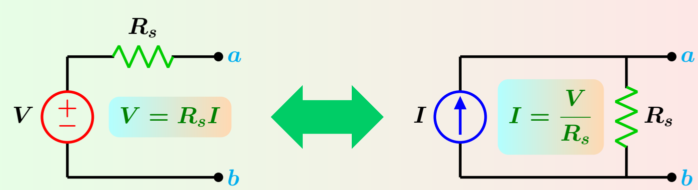


Figura 7: Configuraciones equivalentes.

Configuraciones estrella y delta

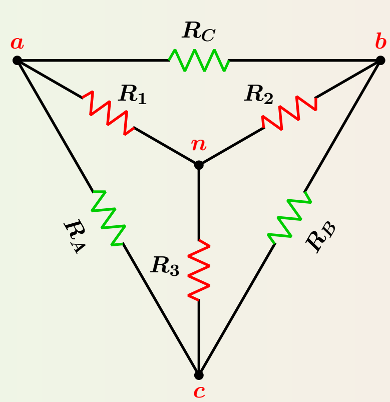
Expresiones para convertir una configuración delta a estrella y viceversa son respectivamente:

Conversión delta a estrella

$$R_1 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$



Conversión estrella a delta

$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}$$

Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Dualidad

Pares duales en relación voltaje - corriente de elementos que almacenan energía.

1. $v_L(t) = L\dfrac{di}{dt}$
2. $i_C(t) = C\dfrac{dv}{dt}$
3. $v_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)\,dt$
4. $i_L(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int v(t)\,dt$

Circuito RC sin fuente

La ecuación diferencial lineal de primer orden que representa al circuito RC sin fuente, en fase de descarga con condición inicial $V_0 \neq 0$ para $t > 0$ es:

Ec. Diferencial

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$$

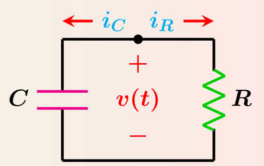


Figura 8: Circuito RC.

1. $\tau = RC$
2. $v_C(t) = v_R(t)$
3. $i_C(t) + i_R(t) = 0$
4. $i_R(t) = \dfrac{V_0}{R}e^{-t/\tau}$
5. $v_C(t) = V_0 e^{-t/\tau}$
6. $p_R(t) = \dfrac{V_0^2}{R}e^{-2t/\tau}$

Capacitor en el dominio s

Un capacitor con una condición inicial $v(0) \neq 0$ tiene una representación que se muestra en la Figura 9.

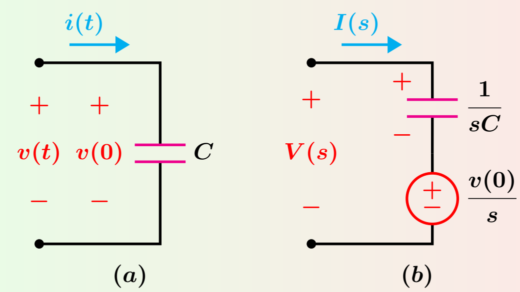


Figura 9: Representación de un capacitor: (a) dominio del tiempo, (b) dominio s.

Impedancia

$$Z_C = \frac{1}{sC}$$

Ley de Ohm

$$V = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0)}{s}$$

Circuito RC con fuente

Si en el circuito mostrado en la Figura 10 el capacitor tiene un voltaje inicial $V_0 \neq 0$, las ecuaciones para el voltaje y la corriente son:

1. $v_C(t) = V_0 \quad t < 0$
2. $v_C(t) = \left[V_s + (V_0 - V_s)\,e^{-t/\tau}\right]u(t)$
3. $i_C(t) = \left(\dfrac{V_s - V_0}{R}\,e^{-t/\tau}\right)u(t)$

Circuito RC con fuente

El circuito RC con condiciones iniciales nulas $v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+) = V_0 = 0$ en fase de carga se muestra en la Figura 10.

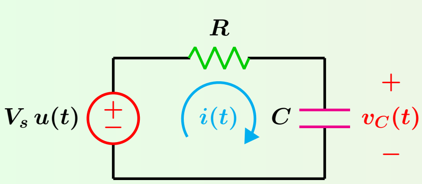


Figura 10: Circuito RC con fuente de voltaje.

Ecuación Diferencial

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC}u(t)$$

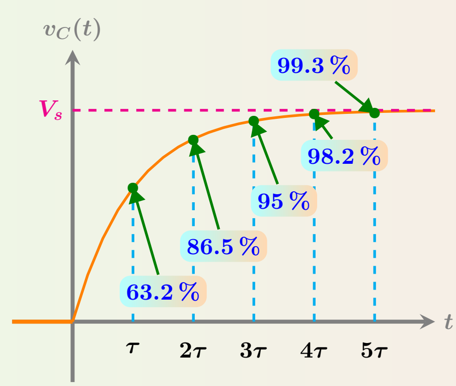


Figura 11: Respuesta transitoria de voltaje del circuito RC.

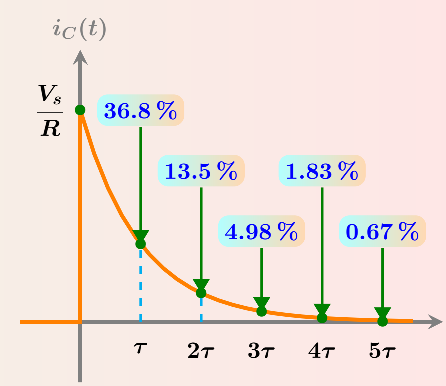


Figura 12: Respuesta transitoria de corriente del circuito RC.

Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Circuito RC con fuente

Expresiones de voltaje y corriente para la fase de carga del capacitor para $t \geq 0$ son:

1. $v_C(t) = V_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$
2. $i(t) = \dfrac{V_s}{R} e^{-t/\tau}$
3. $v_R(t) = V_s e^{-t/\tau}$
4. $\boxed{\tau = RC}$

Circuito RL sin fuente

El circuito RL sin fuente con condición inicial $I_0 \neq 0$ en fase de descarga se muestra en la Figura 13:

Ec. Diferencial

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

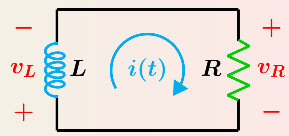


Figura 13: Circuito RL.

1. $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$
2. $v_R(t) = I_0 R e^{-t/\tau}$
3. $p_R(t) = I_0^2 R e^{-2t/\tau}$
4. $v_R + v_L = 0$

Inductor en el dominio s

Un Inductor con una condición inicial $i(0) \neq 0$ tiene una representación que se muestra en la Figura 14.

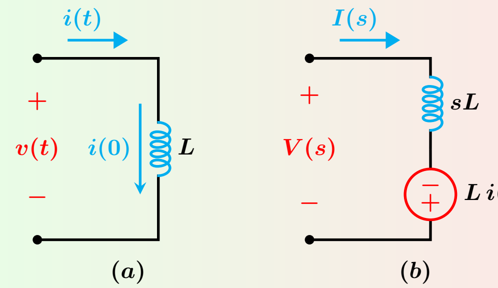


Figura 14: Representación de un inductor: (a) dominio del tiempo, (b) dominio s.

Impedancia	Ley de Ohm
$Z_L = sL$	$V = sLI(s) - Li(0)$

Circuito RL con fuente

Si el inductor de la Figura 15 tiene una condición inicial $I_0 \neq 0$ en $t = 0$ la corriente para $t \geq 0$ es:

$$\boxed{i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right) e^{-t/\tau}} \qquad \boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

Circuito RL con fuente

El circuito RL con condiciones iniciales nulas $i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = I_0 = 0$ en fase de carga se muestra en la Figura 15.

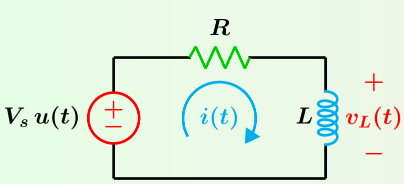


Figura 15: Circuito RL con fuente de voltaje.

Ecuación Diferencial

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V_s}{L} u(t)$$

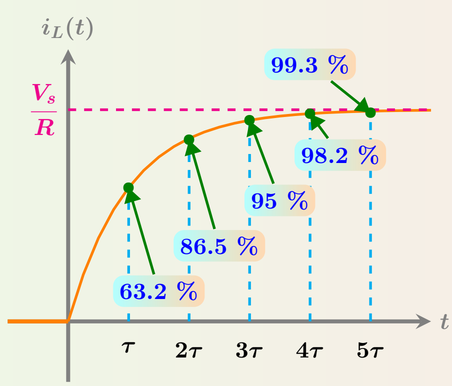


Figura 16: Respuesta transitoria de corriente del circuito RL.

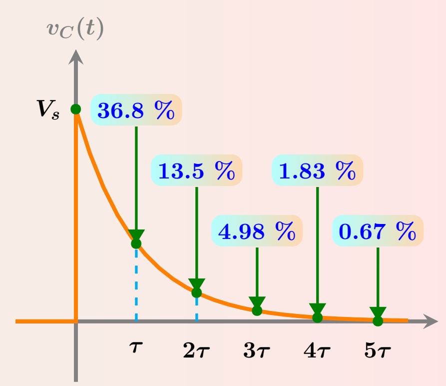


Figura 17: Respuesta transitoria de voltaje del circuito RL.

$$\boxed{i(t) = \frac{V_s}{R}(1 - e^{-t/\tau})u(t)}$$

$$\boxed{v_R(t) = V_s(1 - e^{-t/\tau})u(t)}$$

$$\boxed{v_L(t) = (V_s\, e^{-t/\tau})u(t)}$$

Circuito RLC en serie sin fuente

El circuito RLC en serie sin fuente con condiciones iniciales $I_0 \neq 0$ y $V_0 \neq 0$ se muestra en la Figura 18 y las respectivas ecuaciones que describen su comportamiento son:

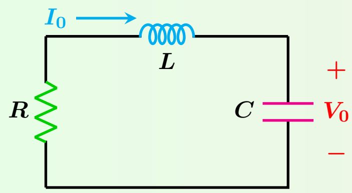


Figura 18: Circuito RLC.

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

1. $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$
2. $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$
3. $s = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$
4. $\alpha = \frac{R}{2L}$
5. $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
6. $\frac{di(0)}{dt} = \frac{-(RI_0 + V_0)}{L}$

Caso subamortiguado: $\alpha < \omega_n$

Para este caso las raíces son complejas conjugadas y su gráfica se muestra en la Figura 19 la respuesta es:

$$i(t) = e^{-\alpha t}(K_1 \cos(\omega_d t) + K_2 \sin(\omega_d t))$$

1. $s_1 = -\alpha + j\omega_d$
2. $s_2 = -\alpha - j\omega_d$
3. $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$

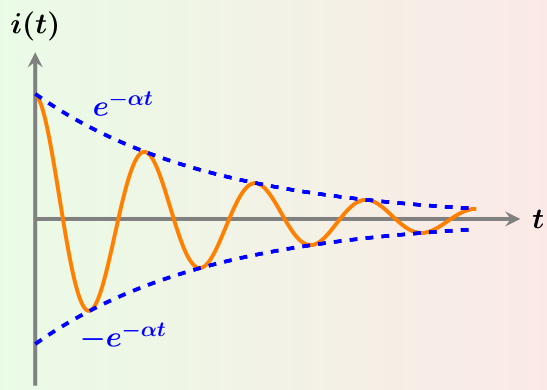


Figura 19: Respuesta subamortiguada.

Notas para K_1 y K_2

Para la determinar las constantes K_1 y K_2, la condición inicial de la primera derivada es:

$$\frac{di(0)}{dt} = \frac{-(RI_0 + V_0)}{L}$$

Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Caso oscilatorio $\alpha = 0$

El circuito LC con condiciones iniciales $I_0 = 0$ y $V_0 \neq 0$ se muestra en la Figura 20

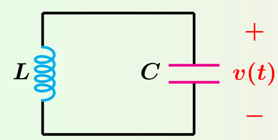


Figura 20: Circuito LC.

Ec Diferencial

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{v}{LC} = 0$$

Ec. Característica

$$s^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

Frec amortiguada

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$$

Solución de la ec diferencial

$$v(t) = K_1 \cos(\omega_d t) + K_2 \sin(\omega_d t)$$

Para determinar las constantes K_1 y K_2, se requiere de las condiciones iniciales:

Condiciones inicialaes

$$v(0) = V_0 \qquad \frac{dv(0)}{dt} = 0$$

1. $s_1 = j\omega_d$
2. $s_2 = -j\omega_d$

Caso sobreamortiguado: $\alpha > \omega_n$

Para este caso las raíces son reales y diferentes y su gráfica se muestra en la Figura 21 la respuesta es:

$$i(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

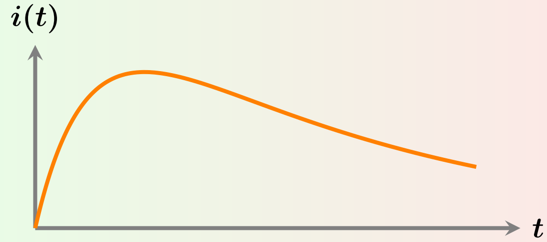


Figura 21: Respuesta sobreamortiguada.

Caso criticamente amortiguado: $\alpha = \omega_n$

Para este caso las raíces son iguales y su gráfica se muestra en la Figura 22 la respuesta es:

$$i(t) = (K_2 + K_1 t)e^{-\alpha t}$$

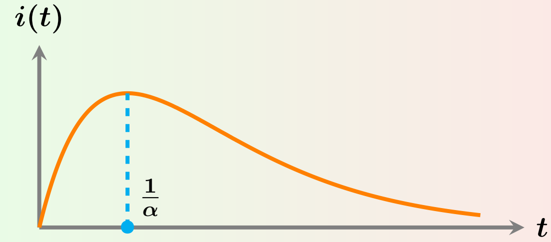


Figura 22: Respuesta Crit. amortiguada.

Circuito RLC en serie con fuente

Las expresiones que describen el comportamiento del circuito mostrado en la Figura 23 son:

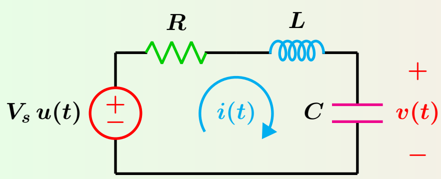


Figura 23: Circuito RLC.

Ec característica

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC}u(t)$$

Cond. iniciales

$$v(0) = V_0 \qquad \frac{dv(0)}{dt}$$

Caso Subamortiguado

La solución de la ecuación diferencial es:

$$v(t) = V_s + e^{-\alpha t}(K_1 \cos(\omega_d t) + K_2 \sin(\omega_d t))$$

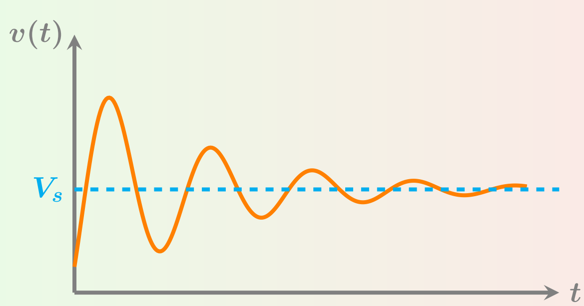


Figura 24: Respuesta subamortiguada.

Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Caso Sobreamortiguado y Crit. Amortiguado

Las gráficas para estos casos se muestran en la Figura 25 y sus respectivas soluciones son:

Sobreamortiguada

$$v(t) = V_s + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

Críticamente. Amortiguado

$$v(t) = V_s + (K_2 + K_1 t)e^{-\alpha t}$$

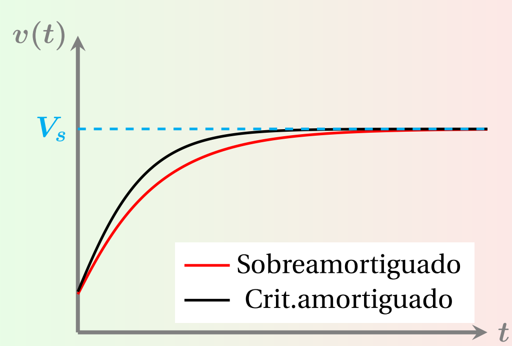


Figura 25: Respuestas de ambos casos.

El valor de estado estable se alcanza mas rápido con el caso críticamente amortiguado.

Circuito RLC en paralelo sin fuente

El circuito RLC en serie sin fuente con condiciones iniciales $I_0 \neq 0$ y $V_0 \neq 0$ se muestra en la Figura 26.

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

Ec característica

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

4. $$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

5. $$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

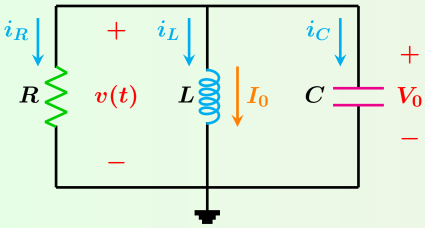


Figura 26: Circuito RLC.

1. $$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$$

2. $$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$$

3. $$s = \frac{-1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

6. $$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{-(RI_0 + V_0)}{RC}$$

Caso criticamente amortiguado: $\alpha = \omega_n$

Las raíces son iguales, la gráfica es similar a la de la Figura 22 para el voltaje, la respuesta es:

$$v(t) = (K_2 + K_1 t)e^{-\alpha t}$$

Caso sobreamortiguado: $\alpha > \omega_n$

Las raíces son reales y diferentes, su gráfica es similar a la de la Figura 21 para el voltaje, la respuesta es:

$$v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Caso subamortiguado: $\alpha < 0$

Las raíces son complejas conjugadas, la gráfica es similar a la de la Figura 19 para el voltaje la respuesta es:

$$v(t) = e^{-\alpha t}(K_1 \cos(\omega_d t) + K_2 \sin(\omega_d t))$$

1. $$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

2. $$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

3. $$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$$

Notas para K_1 y K_2

Para la determinar las constantes K_1 y K_2, se requieren de las condiciones iniciales siguientes:

$$v(0) = V_0 \qquad \frac{dv(0)}{dt} = \frac{-(RI_0 + V_0)}{RC}$$

Circuito RLC en paralelo con fuente

El circuito RLC en paralelo con fuente de corriente se muestra en la Figura 27 y las ecuaciones que describen su comportamiento son:

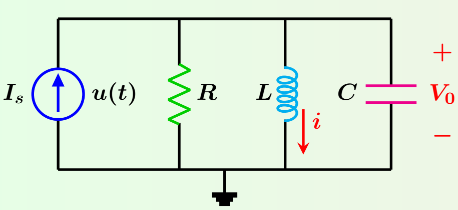


Figura 27: Circuito RLC.

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_s}{LC}u(t)$$

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Notas para K_1 y K_2

Las expresiones que describen el comportamiento son las mismas del circuito RLC paralelo sin fuente. Las constantes K_1 y K_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Caso críticamente amortiguado: $\alpha = \omega_n$

Raíces iguales, la respuesta es:

$$i(t) = I_s + (K_2 + K_1 t)e^{-\alpha t}$$

Caso sobreamortiguado: $\alpha > \omega_n$

Raíces reales y diferentes la respuesta es:

$$i(t) = I_s + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

Caso subamortiguado: $\alpha < \omega_n$

Raíces complejas conjugadas la respuesta es:

$$i(t) = I_s + e^{-\alpha t}(K_1 \cos(\omega_d t) + K_2 \sin(\omega_d t))$$

1. $s_1 = -\alpha + j\omega_d$
2. $s_2 = -\alpha - j\omega_d$
3. $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$

Transformaciones

La representación en el dominio del tiempo y en el dominio "s" de fuentes dependientes e independientes se muestra en la Figura 28. Las fuentes independientes son entradas escalón.

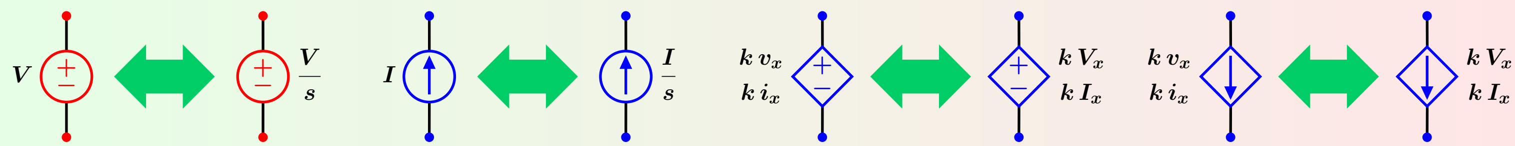
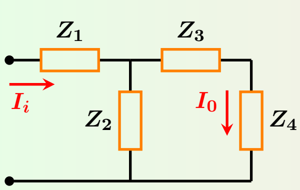


Figura 28: Equivalencias entre el dominio del tiempo y dominio "s".

Función de transferencia de corrientes

La Función de transferencia de corrientes es la relación entre la corriente de salida I_0 y la corriente de entrada I_i.

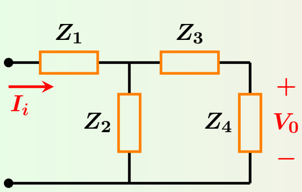


$H(s)$ de corrientes

$$\frac{I_0}{I_i} = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

Función de transferencia de impedancia

La Función de transferencia de impedancia es la relación entre el voltaje de salida V_0 y la corriente de entrada I_i.



$H(s)$ de impedancia

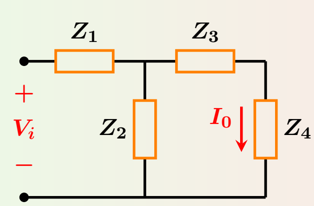
$$\frac{V_0}{I_i} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

Función de transferencia de admitancia

La Función de transferencia de admitancia, es la relación entre la corriente de salida I_0 y el voltaje de entrada V_i.

$H(s)$ de admitancia

$$\frac{I_0}{V_i} = \frac{Z_2}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$



Respuesta en Frecuencia $H(j\omega)$

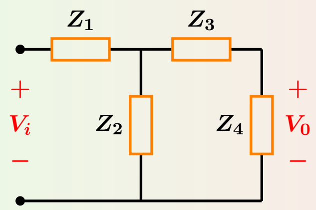
$$s = j\omega \quad \Longrightarrow \quad H(s) \Longrightarrow H(j\omega)$$

Función de transferencia de voltajes

La Función de transferencia de voltajes, es la relación entre el voltaje de salida V_0 y el voltaje de entrada V_i.

$H(s)$ de voltajes

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$



Resistencia en el dominio s

Resistencia en el dominio del tiempo y s.

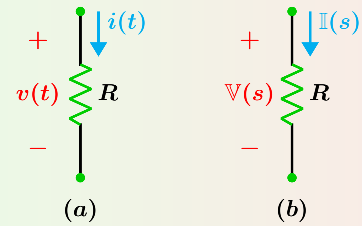


Figura 29: (a) Dominio del tiempo, (b) dominio s.

Impedancia

$$Z_R = R$$

Ley de Ohm

$$V(s) = RI(s)$$