P3

Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales

Clave(6443)

—— Práctica N° 3 ——

Función de transferencia y sistemas de primer orden

Apellidos y nombres:				
Grupo:		Profesor:		Calificación:
Semestre:	1			
Año:	2018	Fecha de ejecución:		

CONTROL DE MODIFICACIONES

Rev.	Descripción	Elaborado por	Revisado por	Fecha
0	Primera versión	M.I Natanael Vieyra y M.I Hugo Franco	Dr. Paul Maya Ortíz	07.01.2017

I. Objetivos

- El alumno estudiará el concepto de función de transferencia.
- El alumno caracterizará la respuesta de sistemas de primer orden a las entradas impulso y escalón.

II. Recursos

1. Software
   a) Software matemático especializado.
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios
   a) Computadora con 2GB RAM min.

III. Seguridad en la ejecución de la actividad

	Peligro o fuente de energía	Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1ro	Voltaje alterno 127 V	Electrocución	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto	☐
2do	Voltaje continuo 24 V	Daño a equipo	Verificar polaridad y nivel antes de realizar la conexión del equipo o dispositivo	☐
		Apellidos y nombres:		

IV. Fundamento teórico

IV.1. Función de Transferencia

Uno de los métodos más comunes y útiles para representar a un sistema lineal e invariante en el tiempo, el cual es modelado por medio de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, es a través de su función de transferencia. El concepto de función de transferencia surge de la integral de convolución como herramienta para caracterizar la salida de un sistema ante cualquier señal de entrada arbitraria mediante el conocimiento de la respuesta al impulso del sistema, esto es,

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t > 0, \tag{1}$$

y la transformada unilateral de Laplace de señales, esta transformada, además de ser lineal, tiene la siguiente propiedad,

$$\mathcal{L}\left\{x_1(t) * x_2(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\}\mathcal{L}\left\{x_2(t)\right\} = X_1(s)X_2(s), \tag{2}$$

en donde el símbolo $*$ denota la operación de convolución entre las señales de tiempo continuo $x_1(t)$ y $x_2(t)$, $\mathcal{L}\{(\cdot)\}$ denota la transformada de Laplace de $(\cdot)$ y $X_1(s)$ y $X_2(s)$ son las respectivas transformadas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$. La propiedad anterior, nos indica que la transformada de Laplace de la convolución de dos señales es igual al producto de las transformadas de Laplace correspondientes. Aplicando la propiedad (2) a (1) obtenemos la siguiente expresión,

$$Y(s) = H(s)X(s),$$

en donde $Y(s)$, $H(s)$ y $X(s)$ son las transformadas de Laplace de la señal de salida, de la respuesta al impulso y de la entrada del sistema, respectivamente. El cociente entre las transformadas de Laplace de la señal de salida y la señal de entrada, se conoce como la función de transferencia del sistema,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s).$$

La función de transferencia es fácilmente determinada una vez que el sistema ha sido descrito como una ecuación diferencial, se debe mencionar que en este momento se trabaja con sistemas con una sola entrada y una sola salida (SISO, por sus siglas en ingles). La función de transferencia no es exclusiva de este tipo de sistemas sino que también puede ser extendida a sistemas con múltiples entradas y salidas. Considere un ejemplo un sistema de tercer orden en el que la ecuación diferencial que describe su comportamiento con $x(t)$ como una entrada y $y(t)$ como salida es,

$$a_0\dddot{y}(t) + a_1\ddot{y}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_3y(t) = b_0\ddot{x}(t) + b_1\dot{x}(t) + b_2x(t)$$

Para encontrar la función de transferencia, como primer punto se obtiene la transformada de Laplace de la ecuación diferencial (considerando condiciones iniciales nulas)

$$a_0s^3Y(s) + a_1s^2Y(s) + a_2sY(s) + a_3Y(s) = b_0s^2X(s) + b_1sX(s) + b_2X(s)$$

La función de transferencia se define como la relación entre la salida y la entrada, esto es,

$$(a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3)Y(s) = (b_0s^2 + b_1s + b_2)X(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^2 + b_1s + b_2}{a_0s^3 + a_1s^2 + a}$$

El polinomio que se obtiene en el denominador de la función de transferencia recibe el nombre de ecuación característica, el cual determina el comportamiento del sistema (rápido, lento, oscilatorio, sub-amortiguado, etc). Generalmente el coeficiente a_0 de la función de transferencia es igualado a 1.

Para el caso general de una ecuación diferencial de orden n con m derivadas en la entrada (los superíndices en paréntesis indican el orden de la derivada):

$$a_0y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_ny(t) = b_0x^{(m)}(t) + b_1x^{(m-1)}(t) + ... + b_{m-1}\dot{x}(t) + b_mx(t)$$
$$a_0s^nY(s) + a_1s^{n-1}Y(s) + ... + a_{n-1}sY(s) + a_nY(s) = b_0s^mX(s) + b_1s^{m-1}X(s) + ... + b_{m-1}sX(s) + b_mX(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + ... + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n}$$

Esto puede ser escrito como

$$\sum_{i=0}^{n} a_iy^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{m} b_ix^{(m-i)}$$

tomando la transformada de Laplace de ambos miembros,

$$Y(s)\sum_{i=0}^{n} a_is^{n-i} = X(x)\sum_{i=0}^{m} b_is^{m-i}$$

y calculando el cociente entre las transformadas de la salida y la entrada, se tiene lo siguiente,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_is^{m-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_is^{n-i}} = \frac{\mathcal{L}(salida)}{\mathcal{L}(entrada)}$$

La función de transferencia es una representación de estado cero del sistema, solamente si las condiciones iniciales son cero.

IV.2. Patrón de polos y ceros

Un sistema es regularmente definido en términos de los polos y los ceros de su función de transferencia. Como se mencionó anteriormente un sistema puede ser descrito a través de su función de transferencia:

$$H(s) = \frac{b_0s^2 + b_1s + b_2}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}$$

Reescribiendo $H(s)$ en su forma estándar tal que el término de orden superior del numerador y el denominador son unitarios.

$$H(s) = \frac{b_0}{a_0}\frac{s^2 + \frac{b_1}{b_0}s + \frac{b_2}{b_0}}{s^3 + \frac{a_1}{a_0}s^2 + \frac{a_2}{a_0}s + \frac{a_3}{a_0}}$$

El término constante (b_0/a_0) multiplica la relación de los polinomios los cuales pueden ser factorizados

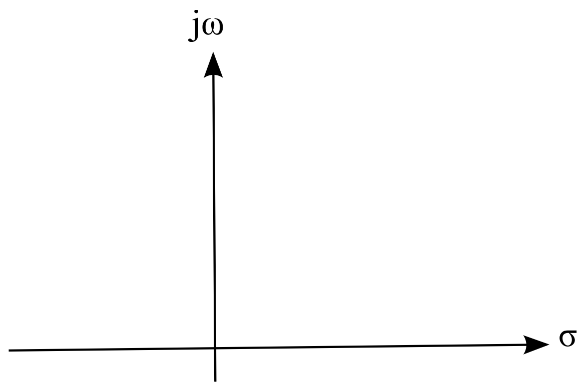
$$H(s) = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

Donde $k = b_0/a_0$, el cual es conocido como término constante. Los términos z_i son los ceros de la función de transferencia, sí $s \to z_i$ el numerador del polinomio es cero, por lo que la función de transferencia también es cero. Los términos p_i son los polos de la función de transferencia; sí $s \to p_i$ el denominador del polinomio es cero, por lo que la función de transferencia tiende a infinito.

En un caso general de una función de transferencia con un numerador de orden m y un denominador de orden n,ésta puede ser representada como:

$$H(s) = k\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

El patrón de polos y ceros de la función de transferencia de un SLI es una gráfica en el plano complejo s donde los ceros se describen con el símbolo ‘o’y los polos con el símbolo ‘x’.



Un sistema es estable con función de transferencia $H(s)$ si todos los polos se encuentran en el semiplano izquierdo.

IV.3. Respuesta a una entrada escalón

Una de las entradas más utilizadas con fines de prueba, es el escalón unitario que se define como:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}$$

Se puede encontrar fácilmente la respuesta de un sistema a una entrada escalón sí se conoce la función de transferencia del sistema,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

la salida con condiciones nulas (por lo tanto se habla de la repuesta en estado cero) es simplemente determinada por

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

por lo que la respuesta a un escalón queda determinada por

$$Y_\gamma(s) = \frac{1}{s}H(s)$$

Inmediatamente se puede determinar dos características de la respuesta al escalón, los valores iniciales y finales, se considera entonces:

Teorema del valor inicial:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$
$$\lim_{t\to 0^+} y_\gamma(t) = \lim_{s\to\infty} sY_\gamma(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{1}{s}H(s) = \lim_{s\to\infty} H(s)$$

Teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$
$$\lim_{t\to\infty} y_\gamma(t) = \lim_{s\to 0} sY_\gamma(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}H(s) = \lim_{s\to 0} H(s)$$

El resultado puede ser escrito como:

$$y_\gamma(0^+) = H(\infty)$$
$$y_\gamma(\infty) = H(0)$$

Si se considera un sistema de primer orden genérico cuya función de transferencia está dada por,

$$H(s) = \frac{b\cdot s + c}{s + a}$$

donde a, b y c son números reales arbitrarios, se debe mencionar que b o c (no ambos) pueden ser cero. Para obtener la respuesta al escalón unitario, la función de transferencia $H(s)$ es multiplicada por $1/s$

$$Y_\gamma(s) = \frac{1}{s}H(s) = \frac{1}{s}\frac{b\cdot s + c}{s + a}$$

Utilizando el teorema del valor final e inicial, se puede determinar

$$y_\gamma(0^+) = H(\infty) = b$$
$$y_\gamma(\infty) = H(0) = \frac{c}{a}$$
$$\tau = \frac{1}{a}$$

La expresión que determina la respuesta al escalón unitaria queda dada por:

$$\begin{aligned} y_\gamma(t) &= y_\gamma(\infty) + (y_\gamma(0^+) - y_\gamma(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= H(0) + (H(\infty) - H(0))e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

IV.4. Respuesta a un impulso

Si la función de transferencia de un sistema es dada por $H(s)$, la respuesta al impulso de un sistema está dada por $h(t)$ donde $h(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $H(s)$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

También se debe mencionar que la respuesta al impulso puede ser obtenida a través de la derivada de la respuesta a un escalón

$$y_\delta(t) = h(t) = \frac{d}{dt}y_\gamma(t)$$

V. Cuestionario Previo

1. ¿Qué es la transformada de Laplace?.

2. ¿Qués es la función de transferencia y cómo puede ser determinada?.

3. ¿Qués es un polo y qué es un cero?, ¿Cómo pueden ser determinados?.

VI. Desarrollo de la actividad

1. Encontrar la representación de polos y ceros, así como el término constante del sistema representado a través de la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{6s^2 + 18s + 12}{2s^3 + 10s^2 + 16s + 12}$$

2. Con ayuda de un equipo de computo y un software especializado, obtenga la representación gráfica de los polos y de los ceros de la función de transferencia anteriormente mencionada. ¿Qué puede decir sobre la estabilidad del sistema?.

3. De la Figura 1 obtenga la ecuación diferencial que represente la dinámica del sistema.

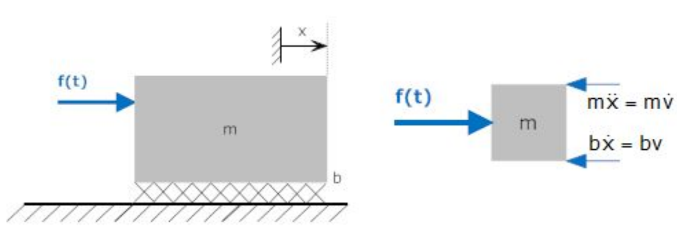


Figura 1. Acción de una fuerza sobre una masa.

4. Obtenga la función de transferencia del sistema y determine la expresión matemática de la respuesta al impulso unitario (considere condiciones iniciales nulas).

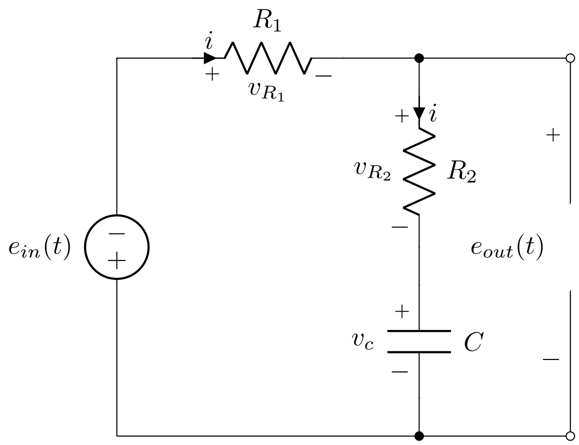


Figura 2. Circuito RL paralelo

5. Grafique la respuesta al impulso cuando la magnitud de este es dos, considere $m = b = 1$.

6. Considere un sistema cuya función de transferencia es representada como:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

Utilice el método de fracciones parciales para encontrar la transformada inversa de Laplace y corrobore sus resultados con ayuda de un software especializado.

7. Considere el circuito mostrado en la 2. Si la entrada de voltaje, $e_{in}(t)$ es un escalón, encuentre la salida $e_{out}(t)$. Considere $R_1 = 2\,[\Omega]$, $R_2 = 3\,[\Omega]$ y $C = 1$ [F].

Como primer punto encuentre la función de transferencia. Considere que el circuito es un divisor de voltaje con dos impedancias, es decir:

$$\frac{E_{out}(s)}{E_{in}(s)} = H(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

donde

$$Z_1 = R_1$$
$$Z_2 = Z_{R2} + Z_c$$

por lo tanto,

$$\frac{E_{out}(s)}{E_{in}(s)} = H(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}}$$

8. Encuentre la expresión matemática que determina la respuesta a una entrada escalón y gráfique sus resultados con ayuda de un software especializado.

9. De una forma alternativa, considerando el teorema del valor final y el teorema del valor inicial (sin la transformada inversa de Laplace) determine la respuesta al escalón. ¿Qué puede decir con respecto a lo realizado en la actividad 8?.

OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Referencias

[Cheever,] Cheever, E. Linear physical systems analysis. http://lpsa.swarthmore.edu/index.html. Accessed: 2017-03-24. (Not cited.)

[Oppenheim, *et al.*, 1998] Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., y Nawab, S. H. (1998). *Señales y sistemas*. Pearson Educación. (Not cited.)